Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
СЕВЕРО-ЗАПАДНЫЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЗАОЧНЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

В.Я. Кучер

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Учебное пособие по применению пакета прикладных программ MathCAD при изучении дисциплины

Санкт-Петербург
2006

Утверждено редакционно-издательским советом университета

УДК 512/972

В.Я. Кучер. Электротехника. Электротехника и электроника: Учебное пособие по применению пакета прикладных программ MathCAD при изучении дисциплины. – СПб.: Изд-во СЗТУ, 2006. – 62с.

В учебном пособии представлены практические приёмы использования векторного анализа, матричного исчисления и комплексных чисел с помощью математического пакета программ MathCAD при расчёте линейных электрических цепей.

Пособие предназначено для студентов специальностей: 140101.65 – «Тепловые электрические станции», 140104.65 – «Промышленная теплоэнергетика», 150104.65 – «Литейное производство чёрных и цветных металлов», 151001.65 – «Технология машиностроения», 150202.65 – «Оборудование и технология сварочного производства», 261001.65 – «Технология художественной обработки материалов», 190601.65 – «Автомобили и автомобильное хозяйство», 190205.65 – «Подъёмно-транспортные, строительные, дорожные машины и оборудование», 200402.65 – «Инженерное дело в медико-биологической практике», 200501.65 – «Метрология и метрологическое обеспечение», 220201.65 – «Управление и информатика в технических системах», 220301.65 – «Автоматизация технологических процессов и производств по отраслям», 230101.65 – «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети», 190701.65 – «Организация перевозок и управление на транспорте по видам», 240401.65 – «Химическая технология органических веществ», 240301.65 – «Химическая технология неорганических веществ», 280202.65 – «Инженерная защита окружающей среды», 080502.65 – «Экономика и управление на предприятии по отраслям» и направлений подготовки бакалавров по этим специальностям.

Рецензенты: кафедра электротехники и электромеханики СЗТУ (Е.П. Брандина, канд. техн. наук, доц.); Г.Я.Скориков, канд. техн. наук, зав. отделом образования Красносельского района Санкт-Петербурга.

Введение

Большинство школьников и даже студентов считают математику скучной и сухой дисциплиной. К её изучению они относятся как к неприятной, но неизбежной трудности на пути к заветному диплому. Понятно, что трудность эту зачастую стараются преодолеть по принципу «сдал-забыл», что в дальнейшем отрицательным образом сказывается при изучении других дисциплин, использующих математику как инструмент. В чём же причины того, что лишь немногие действительно любят и понимают «королеву наук»? Конечно, основные причины фундаментальны, и вряд ли с ними можно что-то поделать. Главный бич математики – рутинные расчёты. Можно построить красивую модель, но не суметь проверить её из-за того, что для этого нужно подсчитать сотни членов ряда или решить систему дифференциальных уравнений. Можно очень интересно рассказать студентам про использование криволинейных координат. Но реальная задача вроде нахождения выражения оператора Лапласа в сферических координатах заставит приуныть, ввиду объёма расчётной работы, самого закоренелого отличника. А системы линейных уравнений? Что может быть скучнее их решения! А ведь, например, студентам технических вузов приходится проделывать эту работу при расчёте электрических схем очень часто. Ввиду неизбежности рутины в математике, до самого недавнего времени достичь успеха в этой науке могли лишь очень усидчивые люди. В конце 80-х годов был сделан шаг к упрощению математических расчётов – появились первые математические пакеты для персональных компьютеров, в том числе и MathCAD.

Итак, главная причина, по которой стоит использовать MathCAD при изучении дисциплин, заключается в том, что при этом учащиеся будут избавлены от рутинных расчётов. Ведь совсем не редкость, когда идейно задача решается за несколько минут, а на проведение подсчёта уходит всё остальное занятие. И не стоит бояться, что, возложив нахождение интеграла или определителя на программу, студенты плохо овладеют соответствующим разделом дисциплины. Страх этот тождественен страху учителей в 80-х годах, когда активно обсуждалось, можно ли позволять школьникам пользоваться калькулятором. Вдруг они при этом разучатся умножать и делить столбиком? Время показало, насколько беспочвенными были эти страхи. Аналогичная дискуссия, но уже относительно «узаконенного» применения математических пакетов, происходит сейчас. Многие преподаватели опасаются, что программы вроде MathCAD отучат студентов думать, что они будут способны лишь нажимать кнопки. На самом же деле, не думая, решить неэлементарную задачу в том же MathCAD невозможно. Программа не умеет мыслить, поэтому нужно создать вычислительный алгоритм, что нереально сделать, не владея математикой. Искусство математика заключается в том, чтобы свести задачу к каким-то элементарным операциям, а не в том, чтобы эти операции проводить.

Главная **цель** пособия – показать, как, используя MathCAD, можно уничтожить рутину при решении контрольных и лабораторных работ, расчётах курсовых и дипломных проектов.

1. Матричные вычисления

Изучение электротехнических дисциплин немыслимо без знания таких понятий, как вектор, матрица и комплексное число, их свойств и действий над ними. Прежде чем рассматривать матричные исчисления, необходимо вспомнить об определителях и их свойствах, так как действия над определителями во многом аналогичны действиям над матрицами.

Операции над матрицами требуют больших затрат по времени. Гораздо быстрее и проще выполнять их с помощью MathCAD.

Матричные вычисления в MathCAD можно условно разделить на два типа. К первому относятся такие элементарные действия над матрицами, как создание, извлечение из них данных, их умножение, сложение или скалярное произведение (в случае векторов). Для их реализации служат специальные операторы трёх рабочих панелей семейства **Math** (Математические): **Calculator** (Калькулятор) и **Symbolic** (Символьные). Ко второму типу можно отнести матричные преобразования, требующие использования специальных функций, которые можно найти в разделе **Matrix and Vector** (Матричные и векторные) списка **Insert Function** (Вставить функцию).

Прежде чем рассматривать особенности решения матричных задач, остановимся на определителях, их свойствах и действиях над ними.

1.1. Определители

Определителем 2-го порядка называется **число**, обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \quad (1)$$

Определителем 3-го порядка называется **число**, обозначаемое символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$ и определяемое равенством

$$a_1\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Определители 2-го порядка, входящие в правую часть равенства (2), получаются из данного определителя 3-го порядка вычёркиванием одной строки и одного столбца и называются его *минорами*. Формула (2) называется формулой разложения определителя 3-го порядка по элементам первой строки.

Свойства определителей.

I. Величина определителя не изменится от замены строк столбцами.

II. Величина определителя от перестановки двух любых параллельных его рядов меняет знак на противоположный.

Из свойств I и II следует, что определитель можно разложить по элементам любого ряда, так как этот ряд можно сделать первой строкой.

III. Определитель с двумя одинаковыми параллельными рядами равен нулю.

IV. Общий множитель элементов одного ряда можно вынести за знак определителя.

V. Величина определителя не изменится, если к элементам одного ряда прибавить элементы параллельного ряда, умноженные на произвольное одинаковое число. Например:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + mc_1 & b_1 + nc_1 & c_1 \\ a_2 + mc_2 & b_2 + nc_2 & c_2 \\ a_3 + mc_3 & b_3 + nc_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

С помощью этого свойства можно в любом ряду определителя 3-го порядка сделать два нуля, чем упростится разложение определителя по элементам этого ряда.

Примечание: Площадь треугольника с вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$ равна:

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Пример 1. Вычислить определитель, разложив его по элементам первого столбца.

Решение:

По формуле (2) вычисляем: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$ $2\cdot(-2\cdot3 - 2\cdot1) - 5\cdot(3\cdot3 - 2\cdot4) + 1\cdot[3\cdot1 - (-2\cdot4)] = -16 - 5 + 11 = -10$.

Пример 2. Найти площадь треугольника с вершинами: $A(2; 3)$, $B(4; -1)$ и $C(6; 5)$.

Площадь треугольника определяем, используя формулу (3): $S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$ $2\cdot(-1\cdot1 - 5\cdot1) - 4\cdot(3\cdot1 - 5\cdot1) + 6\cdot[3\cdot1 - (-1\cdot1)] = -12 + 8 + 24 = 10$.

Гораздо проще и быстрее эти примеры решаются с помощью MathCAD.

Пример 1. Вычислить определитель, разложив его по элементам первого столбца.

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\right| = -10$$

Пример 2. Найти площадь треугольника с вершинами $A(2; 3)$, $B(4; -1)$ и $C(6; 5)$.

$$S := \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}\right| \qquad S = 10$$

Теперь разберёмся как редактируются и создаются матрицы.

1.2. Создание матриц и извлечение из них данных

Наиболее простым способом задания матрицы является использование специальной панели **Insert Matrix** (Вставить матрицу) рабочей панели **Matrix** (Матричные). Для того чтобы её вызвать, необходимо нажать одноимённую кнопку с изображением квадратной матрицы с маркерами вместо элементов. Также, чтобы открыть панель **Matrix**, можно воспользоваться специальным сочетанием «горячих» клавиш «Ctrl+M» или соответствующей командой меню **Insert** (Вставить). Определившись с размерами матрицы, необходимо нажать клавишу Enter. При этом в документ будет вставлена заготовка с чёрными маркерами вместо элементов. Последовательно перемещая курсор при помощи мыши или клавиш движения, вводят в маркеры нужные значения. Элементы матрицы можно представить и символически: как в виде буквы, так и в виде выражения.

На практике обычно оперируют не матрицами, а их именами. Это связано с тем, что, во-первых, многие преобразования можно провести только при помощи имён, а во-вторых, очень важной может оказаться задача экономии места документа, что особенно актуально в случае больших матриц. Для того чтобы вместо матрицы использовать имя, нужно определить её как значение некоторой переменной. Делается это точно так же, как и при задании переменной, как числа, введением матричной заготовки при помощи панели **Insert Matrix** в маркер оператора присваивания.

Элементы матрицы могут быть как числами, так и строками или выражениями. Правила их определения при этом сохраняются те же, что и при задании простых переменных или функций. То есть, если среди выражений или символов, выступающих в качестве элементов матрицы, есть неизвестные или параметры, то они должны быть обязательно определены выше. В противном случае матрица должна быть задана как функция. В случае определения элементов матрицы строковыми выражениями их текст обязательно должен быть взят в кавычки.

Пример 3. Задание матриц с элементами-переменными и элементами-функциями.

$$a := 1 \qquad b := 2 \qquad c := \pi \qquad M := \begin{pmatrix} \dfrac{a+b+c}{2} & \dfrac{a-b-c}{2} \\ \dfrac{2}{a+b+c} & \dfrac{2}{a-b-c} \end{pmatrix} \qquad M = \begin{pmatrix} 3.071 & -2.071 \\ 0.326 & -0.483 \end{pmatrix}$$

$$N(x,y) := \begin{pmatrix} \sin(x+y) & \cos(x-y) \\ \sin\left(\dfrac{x}{3}+y\right) & \cos\left(\dfrac{y}{3}-y\right) \end{pmatrix} \qquad N\left(\pi, \dfrac{\pi}{3}\right) \to \begin{pmatrix} \dfrac{-1}{2}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{1}{2}\cdot 3^{\frac{1}{2}} & \cos\left(\dfrac{2}{9}\cdot\pi\right) \end{pmatrix}$$

Принципиальное отличие между определением значений переменных или функций и элементов матрицы есть только одно – непосредственно в матрицу нельзя добавить матрицу. Если нужно создать тензор (вложенную матрицу), то соответствующие матрицы нужно создать выше в виде переменных, а в качестве элементов тензора прописать их имена. В случае необходимости можно добавить к уже созданной и заполненной матрице строку или столбец. Чтобы это сделать, необходимо поставить курсор к тому элементу, правее которого должен быть введён столбец (или ниже которого – в случае добавления строки). Одним из описанных выше способов необходимо открыть панель **Insert Matrix**, в окошках параметров которой ввести 0 – для строк и 1 – для столбцов (или наоборот – в случае добавления строки) и нажать Enter.

Таким образом, добавление строк и столбцов в матрицу аналогично добавлению строк и столбцов при формировании таблицы в Word. Это наводит на мысль, что матрицу можно заменить таблицей.

В случае заданной матрицы всегда можно получить значение любого её элемента, используя его матричные индексы. Матричные индексы равняются номеру строки и столбца, на пересечении которых элемент находится. В математике отсчёт строк и столбцов принято начинать с 1. В программировании начальные индексы обычно равняются 0. По умалчиванию в MathCAD строки и столбцы также отсчитываются с 0. Для того чтобы изменить точку отсчёта с 0 на любую другую, необходимо открыть окно **Worksheet Options** (Опции рабочего листа) меню **Tools** (Инструменты), на закладке **Built-In Variables** (Системные переменные) и внести соответствующие коррективы в величину параметра **ORIGIN** (Точка отсчёта). Можно поступить проще, сделав переопределение данной системной константы **ORINGIN** вверху документа.

Для того чтобы получить значение какого-то матричного элемента, нужно ввести имя матрицы с соответствующими индексами и ввести оператор численного вывода « = » (Evaluate Numerically) или реже оператор символьного вывода « → » (Evaluate Symbolically), «горячие» клавиши «Ctrl+.», с панели **Evaluation** (Выражение). Для задания индексов на панели **Matrix** имеется специальная кнопка **Subscript** (Индекс), которой соответствует «горячая» клавиша « [». При нажатии на неё на месте будущего индекса , чуть ниже имени матрицы, появится чёрный маркер. В него через запятую вводятся значения индексов. На первом месте должен стоять номер строки, а на втором – столбца. При выделении элемента вектора нужно задать только индекс строки. Вообще, индексы могут быть определены и через выражения или специальные функции, извлечены они должны быть в таком же виде.

Пример 4. Выделение элементов матрицы.

$$V := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad V_{0,0} = 1 \quad V_{0,1} = 2 \quad V_{0,2} = 3 \quad V_{1,0} = 4 \quad V_{1,1} = 5$$

$$V_{1,2} = 6 \quad V_{2,0} = 7 \quad V_{2,1} = 8 \quad V_{2,2} = 9$$

Аналогично извлечению отдельных элементов матрицы, используя индексы, можно задать новую матрицу. Для этого нужно проделать операцию присвоения для каждого элемента по отдельности. При этом размерность матрицы будет определяться элементом с наибольшими индексами. Если присвоены значения не всем элементам матрицы, то все остальные элементы автоматически будут определены как 0.

Пример 5. Поэлементное задание матриц.

$$W_{0,0} := \pi \qquad W_{1,1} := e^1 \qquad W_{2,2} := \sqrt{7}$$

$$W = \begin{pmatrix} 3.142 & 0 & 0 \\ 0 & 2.718 & 0 \\ 0 & 0 & 2.646 \end{pmatrix} \qquad W \rightarrow \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 \\ 0 & \exp(1) & 0 \\ 0 & 0 & 7^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

В приведённом выше примере для определения одной и той же матрицы использованы для наглядности два оператора вывода: численный и символьный. В первом случае диагональные элементы матрицы были получены как числа: π = 3,142 радиан, основание натурального логарифма e = 2,718 и $\sqrt{7}$ = 2,646. Во втором случае те же самые элементы представлены в виде символов: π, e^1 и $7^{\frac{1}{2}}$. Так как наибольший индекс заданных элементов равен двум (точка отсчёта номеров индексов начинается с нуля: 0, 1, 2…), то порядок матрицы равен трём. Учитывая что были заданы только три диагональных элемента матрицы, то остальные шесть элементов заполнились нулями.

Помимо одного элемента, можно выделять из матрицы отдельные столбцы и строки. Для этого используется специальный оператор панели **Matrix** – **Matrix Column** (Столбец матрицы), «горячие» клавиши « Ctrl+6 ». Если требуется выделить строку, то матрицу необходимо транспонировать, оператор **Matrix Transpose** (Матричное транспонирование) той же рабочей панели.

Пример 6. Выделение из матрицы столбца и строки.

$$A := \begin{pmatrix} \log(9.7) & \frac{1}{375} & \sin(45\deg) \\ \ln(8.2) & \sqrt[3]{7} & \cos(60\cdot\deg) \\ e^{7.4} & \sqrt{3.5} & \tan(30\cdot\deg) \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0.987 & 2.667\times10^{-3} & 0.707 \\ 2.104 & 1.913 & 0.5 \\ 1.636\times10^{3} & 1.871 & 0.577 \end{pmatrix}$$

$$A^{\langle 0\rangle} = \begin{pmatrix} 0.987 \\ 2.104 \\ 1.636\times10^{3} \end{pmatrix} \quad A^{\langle 1\rangle} = \begin{pmatrix} 2.667\times10^{-3} \\ 1.913 \\ 1.871 \end{pmatrix} \quad A^{\langle 2\rangle} = \begin{pmatrix} 0.707 \\ 0.5 \\ 0.577 \end{pmatrix} \quad \left(A^T\right)^{\langle 1\rangle} = \begin{pmatrix} 2.104 \\ 1.913 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

$$\left(A^T\right)^{\langle 0\rangle} = \begin{pmatrix} 0.987 \\ 2.667\times10^{-3} \\ 0.707 \end{pmatrix} \qquad \left(A^T\right)^{\langle 2\rangle} = \begin{pmatrix} 1.636\times10^{3} \\ 1.871 \\ 0.577 \end{pmatrix}$$

1.3. Ранжированные переменные

Одной из разновидностей задания массивов является использование ранжированных переменных.

Ранжированная переменная (от англ. *Range* – ряд) – это разновидность вектора, особенностью которого является непосредственная связь между индексом элемента и его величиной. В MathCAD ранжированные переменные очень активно используются как аналог программных операторов цикла, например, при построении графиков.

Простейшим примером ранжированной переменной является вектор, значение элементов которого совпадает с их индексами.

Для задания такой ранжированной переменной необходимо выполнить следующую последовательность действий.

I. Ввести имя переменной и оператор присваивания.

II. Поставить курсор в маркер значения переменной, нажать кнопку **Range Variable** (Ранжированная переменная) панели **Matrix**. При этом будет введена заготовка в виде двух маркеров, разделённых точками:

$$i := \blacksquare \,..\, \blacksquare\,.$$

Кроме того, вставить данную заготовку можно при помощи клавиши «;». Задать оператор ранжированной переменной, введя с клавиатуры последовательно две точки, нельзя.

III. В левый маркер заготовки ранжированной переменной вводят её первое значение 0, в правый – последнее, например 3:

$$i := 0 \,..\, 3.$$

IV. Выводят результат, поставив «=» после имени переменной:

$$i = \begin{array}{|c|}\hline 0 \\ \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}$$

Шаг изменения ранжированной переменной при её задании при помощи описанного способа постоянен и равен. Однако при необходимости его можно сделать и произвольным. Для этого нужно, поставив после левой границы интервала запятую, ввести второе значение ранжированной переменной. Разность между первым и вторым её значением и определит шаг. Границы изменения ранжированной переменной задаются произвольным образом. Так, например, если точка начала изменения ранжированной переменной равняется 5 и она должна уменьшаться с шагом 3 до –1, то её определение необходимо сделать следующим образом:

$$i := 5, 2 \,..\, -1.$$

Во многом использование ранжированных переменных основано на том, что большинство математических действий в MathCAD над векторами осуществляется точно так же, как и над простыми числами. Так, например, существует возможность вычисления значений практически любой встроенной функции от вектора. При этом в качестве результата будет выдан вектор, составленный из значений функции при величинах переменных, равных соответствующим элементам исходного вектора.

Пример 7. Вычисление вектора значений функции. На рис. 1 представлена зависимость вектора матрицы sin(cos(x)) от вектора матрицы sin(x).

$$x := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} \\ \frac{3}{4}\pi \\ \pi \\ \frac{5}{4}\pi \\ \frac{3}{2}\pi \\ \frac{7}{4}\pi \end{pmatrix} \qquad \sin(\cos(x)) = \begin{pmatrix} 0.841 \\ 0.65 \\ 0 \\ -0.65 \\ -0.841 \\ -0.65 \\ 0 \\ 0.65 \end{pmatrix} \qquad \sin(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.707 \\ 1 \\ 0.707 \\ 0 \\ -0.707 \\ -1 \\ -0.707 \end{pmatrix}$$

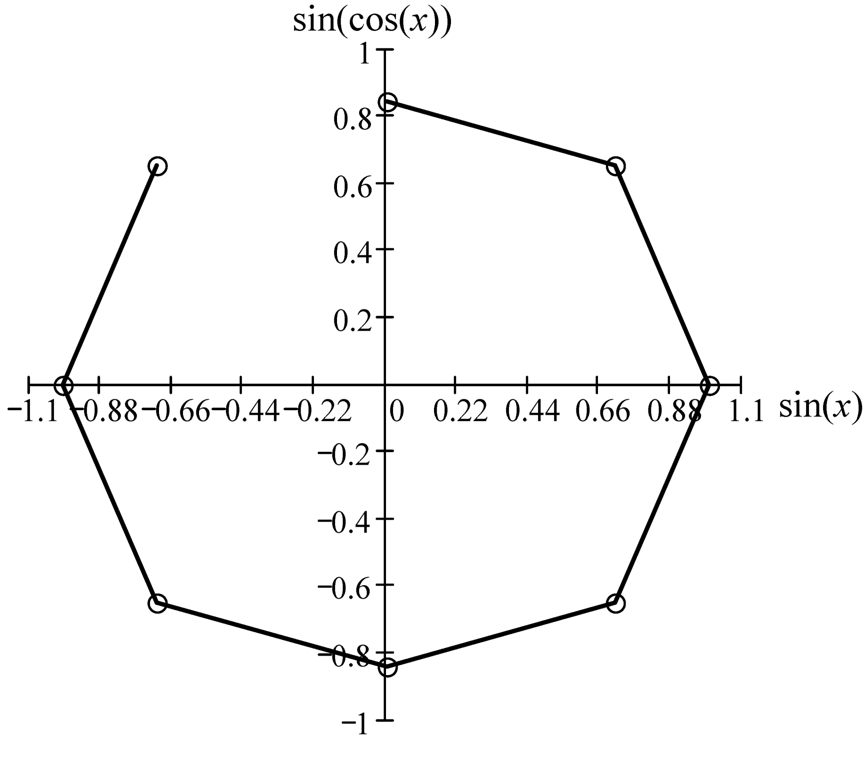


Рис. 1. Зависимость вектора матрицы sin(cos(x)) от вектора матрицы sin(x).

Аналогичным образом можно использовать вектор значений переменной, определённый при помощи ранжированной переменной. У такого способа есть огромное достоинство перед заданием вектора вручную: действительно, если, например, нужно построить график некоторой функции на промежутке от –2 до 10 с шагом 0,2, то на то, чтобы просчитать «вручную» все значения, потребовалось бы весьма значительное время.

Пример 8. Построение нескольких зависимостей от разного аргумента (рис. 2).

$k := 0..\,50 \qquad x_k := k\cdot 0.2 \qquad y_k := \sin(x_k)$

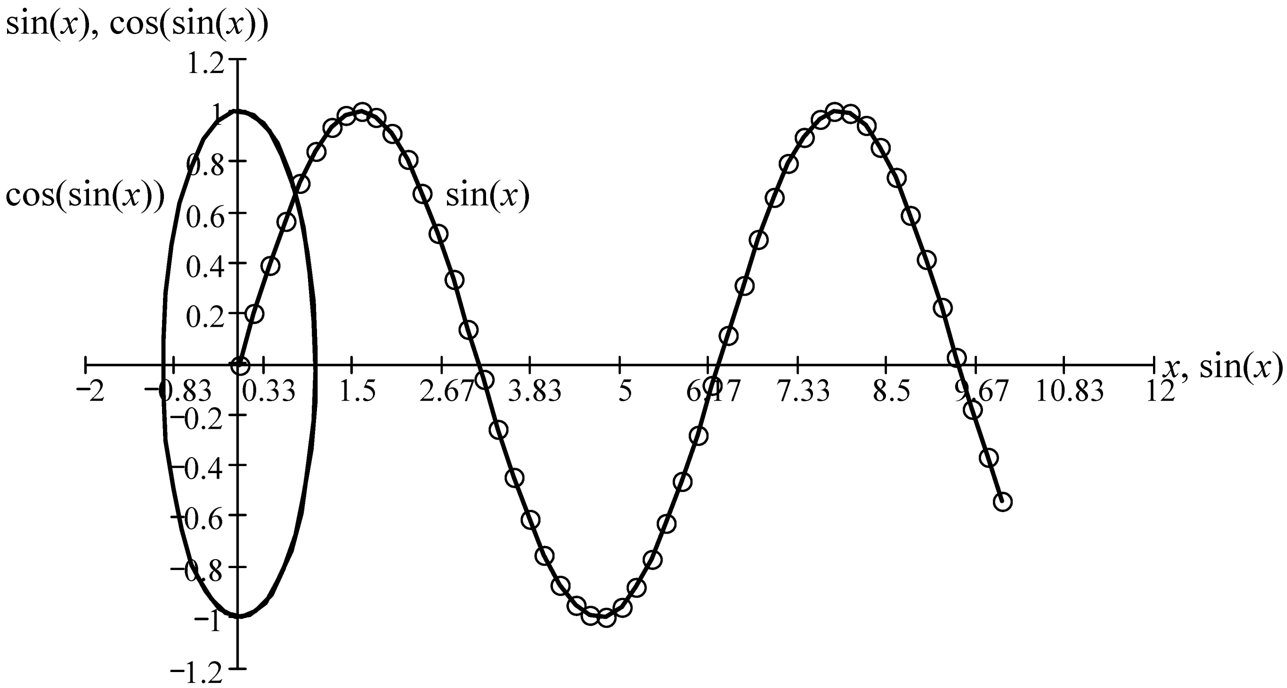


Рис. 2. Зависимости sin(*x*) от *x* и cos(sin(*x*)) от sin(*x*).

При необходимости шаг изменения переменной, по которой вычисляется вектор значений определённой зависимости, можно задать и непостоянным. Для этого нужно просто определить его при помощи конкретной функции, изменяющейся по некоторому закону, исходя из значений ранжированной переменной.

Пример 9. Вычисление вектора значений функции от неравномерно изменяющейся переменной.

$i := 0..\,10 \qquad t_i := i^2\cdot\pi - \frac{\pi}{3} \qquad Q(t) := \cos(t)$

i =

0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

t =

	0
0	-1.047
1	2.094
2	11.519
3	27.227
4	49.218
5	77.493
6	112.05
7	152.891
8	200.015
9	253.422
10	313.112

Q(t) =

	0
0	0.5
1	-0.5
2	0.5
3	-0.5
4	0.5
5	-0.5
6	0.5
7	-0.5
8	0.5
9	-0.5
10	0.5

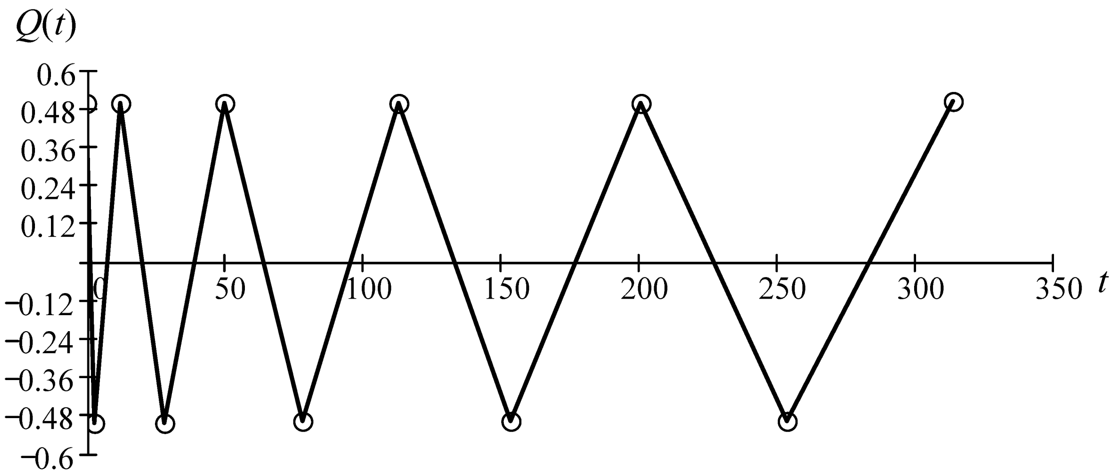


Рис. 3. Зависимость $Q(t)$.

Вектор переменной в примере 9 задан не совсем как функция. Его способ определения можно отнести к поэлементному заданию. Дело в том, что ранжированная переменная работает наподобие цикла в программе, что наглядно иллюстрируется рис. 3 (для замены циклов она и была введена в MathCAD). То есть все выражения, которые к ней относятся, просчитываются непосредственно при получении её нового значения, а не тогда, когда будет вычислен весь её вектор. В этом заключается принципиальное отличие ранжированной переменной от векторов. Эта особенность открывает определённые возможности, которых нет при работе с заданными вручную векторами.

Используя две или более ранжированные переменные, можно имитировать вложенные циклы. Это позволяет, например, формировать матрицы значений функций двух переменных. Подобные матрицы активно используются при построении поверхностей. В примере 10 показано, как можно создать матрицу размерности $M \times N$, содержащую числа от 0 до $N^2 - 1$.

Пример 10. Задание матрицы при помощи ранжированных переменных.

$$i := 0..5 \qquad j := 0..5 \qquad D_{i,j} := 5 \cdot i + i + j \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \end{pmatrix}$$

1.4. Таблицы

Все экспериментальные данные обрабатываются в MathCAD в виде матриц. Однако использовать описанные выше стандартные методы задания массивов в этом случае крайне неудобно. Более того, это просто невозможно: так, если размерность матрицы данных больше 10, то использовать панель **Insert Matrix** невозможно, а поэлементное определение потребует много времени. Кроме того, очень большие матрицы в MathCAD просто не визуализируются.

Разрешить эти проблемы можно, используя *таблицу ввода* (Input Table). Для того чтобы её вызвать, необходимо задействовать команду **Insert ► Data ► Table** (Вставить ► Данные ► Таблица) главного меню или активизировать команду **Insert ► Table** (Вставить ► Таблицу) контекстного меню рабочего поля. В документ будет введена следующая заготовка:

∎ :=

	0	1
0	0	
1		

Присвоив будущей матрице определённое имя, определяются с её размерами. Если она не очень большая, можно сразу расширить пустую таблицу до нужной величины. Для этого следует использовать специальные чёрные маркеры, появляющиеся на контуре таблицы при её выделении.

Сам процесс форматирования величины табличной заготовки абсолютно стандартен для Windows и выполняется протаскиванием при нажатой левой клавиши мыши. Никаких ограничений на размеры таблица ввода не имеет.

Чаще таблицу ввода не разворачивают в полную величину, а введение значений осуществляют при помощи клавиш движения. Это помогает не только сэкономить место в документе, но и ускорить процесс задания матрицы. Процесс заполнения таблицы ввода аналогичен вводу данных в таблицы Excel. Во многом создание таблицы повторяет заполнение обычных матриц, однако одно существенное отличие всё же существует: в таблицах нельзя использовать формулы. Так как таблицы являются для MathCAD такими же матрицами, как и заданные стандартными способами, с ними можно проводить все те же преобразования, что и со стандартными по виду массивами.

Пример 11. Создание таблицы ввода и ввод данных.

Вводим заготовку будущей таблицы и присваиваем ей имя «Table». Определяем её как квадратичную матрицу размером $N \times N = 5 \times 5$ с тем, чтобы ввести в неё значения 0 ÷ 35 с шагом 1.

Table :=

	0	1
0	0	1
1	6	7

Таблица не развёрнута, но она содержит все 36 значений. Чтобы убедиться в этом, представим её в виде матрицы.

$$\mathrm{Table} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 18 & 19 & 20 & 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 & 27 & 28 & 29 \\ 30 & 31 & 32 & 33 & 34 & 35 \end{pmatrix}$$

Извлечём все элементы матрицы.

$\mathrm{Table}_{0,2} = 2$ $\mathrm{Table}_{0,3} = 3$ $\mathrm{Table}_{0,4} = 4$ $\mathrm{Table}_{0,5} = 5$

$\mathrm{Table}_{1,2} = 8$ $\mathrm{Table}_{1,3} = 9$ $\mathrm{Table}_{1,4} = 10$ $\mathrm{Table}_{1,5} = 11$

$\mathrm{Table}_{2,0} = 12$ $\mathrm{Table}_{2,1} = 13$ $\mathrm{Table}_{2,2} = 14$ $\mathrm{Table}_{2,3} = 15$

$\mathrm{Table}_{2,4} = 16$ $\mathrm{Table}_{2,5} = 17$ $\mathrm{Table}_{3,0} = 18$ $\mathrm{Table}_{3,1} = 19$

$\mathrm{Table}_{3,2} = 20$ $\mathrm{Table}_{3,3} = 21$ $\mathrm{Table}_{3,4} = 22$ $\mathrm{Table}_{3,5} = 23$

$\mathrm{Table}_{4,0} = 24$ $\mathrm{Table}_{4,1} = 25$ $\mathrm{Table}_{4,2} = 26$ $\mathrm{Table}_{4,3} = 27$

$\mathrm{Table}_{4,4} = 28$ $\mathrm{Table}_{4,5} = 29$ $\mathrm{Table}_{5,0} = 30$ $\mathrm{Table}_{5,1} = 31$

$\mathrm{Table}_{5,2} = 32$ $\mathrm{Table}_{5,3} = 33$ $\mathrm{Table}_{5,4} = 34$ $\mathrm{Table}_{5,5} = 35$

Найдём модуль матрицы $|\mathrm{Table}| = 0$.

2. Элементы векторной алгебры

Вектор $\overline{A}$ – это направленный отрезок, который характеризуется по величине длиной или **модулем** и обозначается $\left|\overline{A}\right|$. Векторы, параллельные одной прямой, называются *коллинеарными*. Векторы, параллельные одной плоскости, называются *компланарными*. Два вектора $\overline{\boldsymbol{A}}$ и $\overline{\boldsymbol{B}}$ называются *равными*, если они имеют *равные модули*, *коллинеарные* и направлены *в одну сторону*.

Умножение вектора на скаляр. *Произведением вектора* $\overline{\boldsymbol{A}}$ *на число* (скаляр) m называется новый вектор, имеющий длину $A|m|$ и направленный одинаково с $\overline{\boldsymbol{A}}$ (при $m > 0$) или противоположно $\overline{\boldsymbol{A}}$ (при $m < 0$).

Сложение векторов. *Суммой векторов* $\overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}} + \overline{\boldsymbol{C}}$ называется вектор $\overline{\boldsymbol{D}}$, замыкающий ломаную линию, построенную из данных векторов. В частности, в построенном на данных векторах $\overline{\boldsymbol{A}}$ и $\overline{\boldsymbol{B}}$, одна диагональ есть сумма $\overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}$, а другая – разность $\overline{\boldsymbol{A}} - \overline{\boldsymbol{B}}$ данных векторов.

Проекция вектора на ось. Пусть вектор $\overline{\boldsymbol{A}}$ составляет угол φ с осью Ox. Тогда *проекция вектора на эту ось* определяется формулой

$$\text{пр}_x\overline{\boldsymbol{A}} = |\overline{\boldsymbol{A}}|\cdot\cos\varphi.$$

Проекция суммы векторов на ось равна сумме проекций составляющих векторов на ту же ось

$$\text{пр}_x(\overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}) = \text{пр}_x\overline{\boldsymbol{A}} + \text{пр}_x\overline{\boldsymbol{B}}.$$

Все простейшие операции матричной алгебры реализованы в системе MathCAD с помощью операторов. Вид каждого из них полностью соответствует принятым в математике обозначениям.

Над матрицами применимы те же операции что и над векторами. Вектором в MathCAD принята матрица размерности $N\times1$, то есть содержащая N строк и один столбец или **матрицу-столбец**. Многие матричные операции универсальны как для матриц, так и для векторов: сложение, вычитание, умножение на число. Другие же операции могут быть применимы только к квадратным матрицам размерностью $N\times N$, например оператор вычисления обратной матрицы, или же только к векторам, например векторное произведение или суммирование элементов. Некоторые операторы по-разному действуют на матрицы и векторы, например оператор **Determinant** (Определитель) является оператором вычисления в случае матриц и одновременно оператором модуля вектора. **Модулем вектора** (абсолютной величиной вектора) называется длина изображающего его отрезка. Модуль вектора (Vector Magnitude) по определению равен квадратному корню из суммы квадратов его элементов. Геометрический смысл модуля вектора – это длина отрезка, соединяющего точку начала координат и точку, координаты которой численно равны соответствующим элементам вектора.

В математике иногда вектором считают и **матрицу-строку**. Однако в MathCAD все операторы работают только в случае матриц-столбцов. Поэтому, если возникает необходимость произвести какое-то действие над вектором, представленным вектором-строкой, его следует просто предварительно транспонировать.

2.1. Сложение и вычитание матриц

Для того чтобы сложить или вычислить матрицы, используются привычные символы «+» или «–», которые вводятся с клавиатуры или при помощи меню **Calculator** (Калькулятор) и помещаются между соответствующими матрицами или именами матриц. При этом к каждому элементу M_{ij} первой матрицы прибавится (или вычтется из него) элемент $M1_{ij}$ второй матрицы. Результатом будет третья матрица, элементы которой будут суммой (разностью) соответствующих элементов суммируемых (вычитаемых) матриц. Естественно, матрицы должны быть одинаковой размерности, иначе будет выдано сообщение об ошибке. Кроме того, в выражениях матричного сложения или вычитания можно использовать и коэффициенты.

Пример 12. На плоскости даны точки A (0; –2), B (4; 2), C (4; –2). В начале координат приложены силы $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$. Построить их равнодействующую $\overline{OM}$; найти её проекции на оси координат; углы, образованные с осями координат и её величину.

Решение:

Для построения равнодействующей $\overline{OM}$ находим её координаты

$$x_M = x_A + x_B + x_C = 0 + 4 + 4 = 8;$$

$$y_M = y_A + y_B + y_C = -2 + 2 - 2 = -2.$$

Строим векторную диаграмму векторов $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OC}$ и $\overline{OM}$.

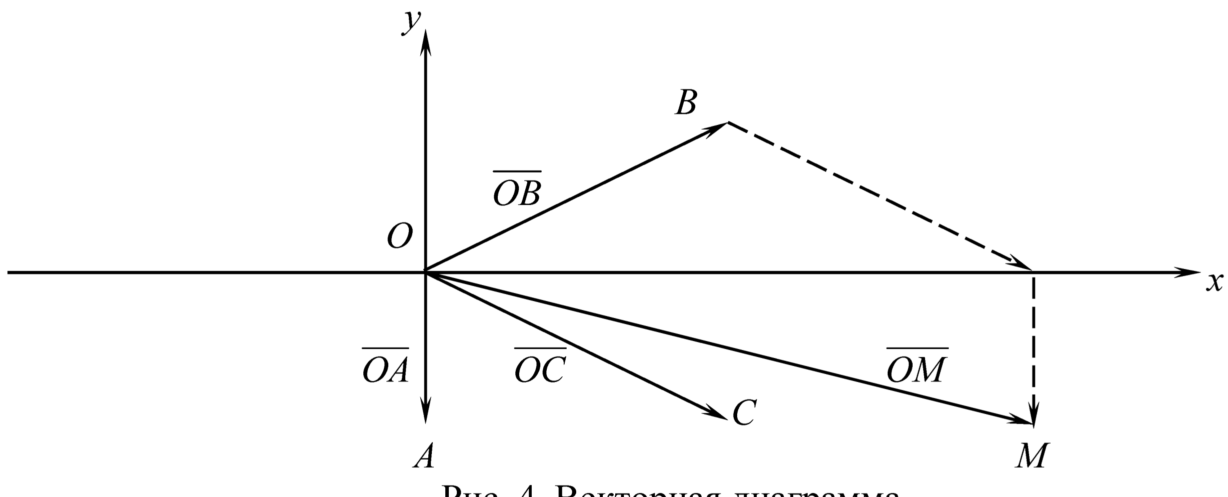


Рис. 4. Векторная диаграмма

Находим модуль вектора $\overline{OM}$: $|\overline{OM}| = \sqrt{x_M^2 + y_M^2} = \sqrt{8^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{17}$.

Проекции вектора $\overline{OM}$ на оси координат будут равны: $пр_x\overline{OM} = x_M = 8$; $пр_y\overline{OM} = y_M = -2$.

Угол, образованный вектором $\overline{OM}$ с осью Ox равен:

$\varphi_x = \arccos(пр_x\overline{OM}/|\overline{OM}|) = 14^\circ$, а с осью Oy 104° (рис. 4).

Гораздо проще и быстрее решение этой задачи может быть сделано в MathCAD.

$$A := \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad OM := A + B + C \quad OM = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$|OM| = 8.246 \quad \phi_x := \operatorname{acos}\left(\frac{8}{|OM|}\right) \quad \phi_x = 14.036\,\deg \quad \phi_y := 90\deg + \phi_x$$

$$\phi_y = 104.036\,\deg$$

2.2. Матричное умножение

Матричное умножение выполняется следующим образом. Все элементы нулевой строки первой матрицы умножаются на соответствующие элементы нулевого столбца второй матрицы, и затем эти произведения суммируются. Полученное значение определяется как первый элемент нулевой строки матрицы-результата. Далее нулевая строка первой матрицы аналогично умножается на первый столбец второй матрицы, и значение заносится как второй элемент верхней строки матрицы-результата. При умножении следующей строки первой матрицы на столбцы второй будет сформирована первая строка результирующей матрицы. И так далее до тех пор, пока не будут перемножены все строки. Так, при умножении матрицы размерности $N \times M$ на матрицу размерности $M \times K$ будет получена матрица размерности $N \times K$. Перемножать матрицы можно лишь в том случае, если количество строк первой равняется числу столбцов второй.

Перемножить матрицы можно либо воспользовавшись клавишей «*», либо при помощи специальной команды **Dot Product** (Умножение) панели **Matrix** (Матричные). При этом знак умножения, представляемый по умолчанию как «·», можно изменить на принятый для матриц «×». Для этого следует воспользоваться командой контекстного меню **View Multiplication** (Видеть умноженное как).

Перемножать матрицы можно и в том случае, когда их элементы представлены символами или выражениями. В таких случаях следует использовать оператор **Evaluate Symbolically** (Вычислить символически).

Если перемножить матрицы несоответствующего размера, будет выдано сообщение об ошибке: «The number of rows and/or columns in these arrays do not match» – «Число строк и (или) столбцов в этих массивах не совпадает», а само произведение окрасится красным цветом.

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их модулей, умноженное на косинус угла между ними $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi \rightarrow$ $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \cos\varphi = |\bar{a}| \cdot \text{пр}_a \bar{b} = |\bar{b}| \cdot \text{пр}_b \bar{a}$.

Свойства скалярного произведения.

I. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ – *переместительный* закон.

II. $\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c}) = \bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{a}\cdot\bar{c}$ – *распределительный* закон.

III. Если вектор $\bar{a}$ параллелен вектору $\bar{b}$, то $\bar{a}\cdot\bar{b} = \pm|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|$. В частности $\bar{a}^2 = \bar{a}\cdot\bar{a} = |\bar{a}|\cdot|\bar{a}|\cos 0^\circ = |\bar{a}|^2$; отсюда $|\bar{a}| = \sqrt{\bar{a}^2}$.

IV. Если вектор $\bar{a}$ перпендикулярен вектору $\bar{b}$, то $\bar{a}\cdot\bar{b} = |\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos 90^\circ = 0$.

V. Скалярные произведения **ортов**: $\bar{\boldsymbol{i}}\cdot\bar{\boldsymbol{j}} = 0$, $\bar{\boldsymbol{j}}\cdot\bar{\boldsymbol{k}} = 0$, $\bar{\boldsymbol{i}}\cdot\bar{\boldsymbol{k}} = 0$, $\bar{\boldsymbol{i}}\cdot\bar{\boldsymbol{i}} = 1$, $\bar{\boldsymbol{j}}\cdot\bar{\boldsymbol{j}} = 1$, $\bar{\boldsymbol{k}}\cdot\bar{\boldsymbol{k}} = 1$.

VI. Если векторы заданы координатами $\bar{a}\,\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\bar{b}\,\{b_x, b_y, b_z\}$, $\bar{a}\cdot\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$.

Угол между векторами $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \dfrac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$.

Условие *параллельности*: $\bar{b} = m\bar{a}$ или $\dfrac{b_x}{a_x} = \dfrac{b_y}{a_y} = \dfrac{b_z}{a_z} = m$.

Условие *перпендикулярности*: $\bar{a}\cdot\bar{b} = 0$ или $a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0$.

Пример 13. Проверим свойства скалярного произведения двух векторов в MathCAD, заданных матрицами «a» и «b».

$$a := \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} \quad a\cdot b^T = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\3 & 4 & 5\\6 & 8 & 10\end{pmatrix} \quad |a| = 2.236 \quad |b| = 7.071$$

$$\frac{a\cdot b^T}{|a|\cdot|b|} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\0.19 & 0.253 & 0.316\\0.379 & 0.506 & 0.632\end{pmatrix} \quad c := a\cdot b \quad c = 14 \quad \frac{c}{|a|\cdot|b|} = 0.885$$

$$\cos(\phi) := 0.885 \quad \operatorname{acos}(0.885) = 0.484\,\mathrm{rad}$$

$$\operatorname{acos}(0.885) = 27.748\,\mathrm{deg}$$

$$c\cdot(a+b) = \begin{pmatrix}42\\70\\98\end{pmatrix} \quad a\cdot c + b\cdot c = \begin{pmatrix}42\\70\\98\end{pmatrix}$$

$$|a|\cdot|b| = 15.811$$

$$|a|\cdot|b| \rightarrow 5\cdot 5^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}$$

$$5\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2} = 15.811$$

$$F := \begin{pmatrix}\frac{3-17}{e} & \pi & \frac{1}{e}\\ 1 & 15 & 0\\ \sqrt[3]{12} & \sqrt{2} & \sqrt{3}\end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix}\frac{-14}{\exp(1)} & \pi & \frac{1}{\exp(1)}\\ 1 & 15 & 0\\ 12^{\frac{1}{3}} & 2^{\frac{1}{2}} & 3^{\frac{1}{2}}\end{pmatrix}$$

Вычисления выполнены численно и символьно.

2.3. Транспонирование матриц

Транспонированием называется матричная операция, переводящая матрицу размерности $M \times N$ в матрицу размерности $N \times M$. При транспонировании строки исходной матрицы превращаются в столбцы, а столбцы – в строки. Оператор транспонирования **Transpose** находится на панели **Matrix**, а также его можно ввести при помощи клавиш « Ctrl + 1 » (перед тем как ввести оператор транспонирования, матрицу следует выделить). Транспонирование можно провести и для матриц, чьи элементы определены символически. При этом следует использовать оператор «M^{T}», расположенный на панели **Symbolic** (Символьные).

Пример 14. Транспонирование матриц.

Даны матрицы:

$$A := \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 4 \\ -5 & 7 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 6 & 9 & -3 \\ 5 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу $X = 3A + B^{\mathrm{T}}$: $\quad X := 3A + B^{T}$

$$B^{T} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 9 & -4 \\ -3 & 8 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 30 & 14 \\ 15 & 8 \\ -18 & 29 \end{pmatrix}$$

Символьное транспонирование:

$$\begin{pmatrix} q & w & s \\ r & p & n \\ l & g & o \end{pmatrix}^{T} \rightarrow \begin{pmatrix} q & r & l \\ w & p & g \\ s & n & o \end{pmatrix}$$

2.4. Определитель матрицы

Определитель – это число (или выражение), которое характеризует линейную независимость строк (или столбцов) матрицы. Ввести оператор определителя **Determinant** можно при помощи панели **Matrix** либо сочетанием клавиш « Shift + \ » (предварительно матрица должна быть выделена).

Пример 15. Вычислить определитель четвёртого порядка.

$$\left|\begin{pmatrix} 4 & 6 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right| = 17$$

2.5. Модуль вектора

Модулем или абсолютной величиной вектора называется длина изображающего его отрезка. Модуль вектора (Vector Magnitude) по определению равен квадратному корню из суммы квадратов из его элементов. Геометрический смысл модуля вектора – это длина отрезка, соединяющего точку начала координат и точку, координаты которой численно равны соответствующим элементам вектора. В случае вектора оператор Determinant является оператором модуля вектора.

Пример 16. Точки $A(11, -9, 7)$, $B(9, 6, 0)$ и $C(-5, 15, -1)$ являются последовательными вершинами ромба. Найти четвёртую вершину D, вычислить длины диагоналей ромба и его периметр (рис. 5).

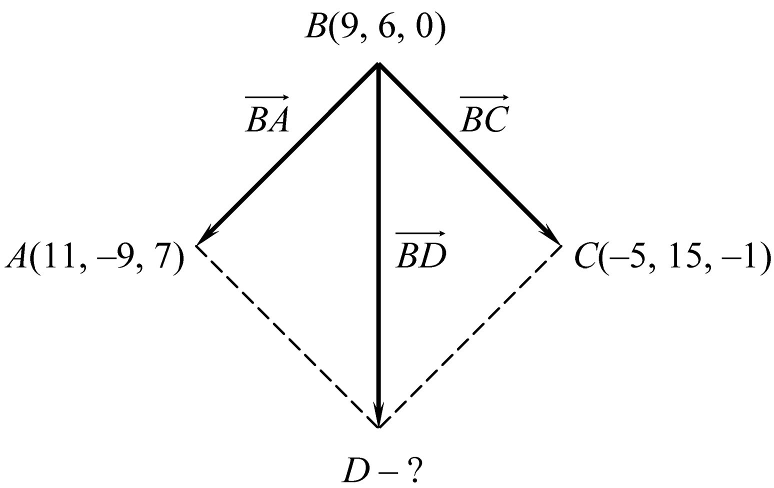


Рис. 5. Определение координат вершины ромба

Представим координаты вершин ромба в векторной форме:

$$A := \begin{pmatrix} 11 \\ -9 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad C := \begin{pmatrix} -5 \\ 15 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Подсчитываем вектора $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$BA := B - A \qquad BC := B - C.$

Сложив вектора $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ по правилу параллелограмма, найдём вектор $\overrightarrow{BD}$:
$BD := BA + BC.$

Определяем координаты вершины D:

$$D := B - BD \qquad D = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Длины диагоналей ромба являются модулями построенных на них векторов:

$$d_1 := |B - D| \qquad d_2 := |A - C| \qquad d_1 \to 6\cdot 6^{\frac{1}{2}} \qquad d_2 \to 8\cdot 14^{\frac{1}{2}}$$

$$d_1 = 14.697 \qquad d_2 = 29.933\ .$$

Так как все стороны ромба равны, его периметр вычислим как:

$$P := 4\,|A - B| \qquad P \to 4\cdot 278^{\frac{1}{2}} \qquad P = 66.693\ \cdot$$

Модуль вектора можно определить и символически:

$$\left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right| \to \left(\operatorname{abs}\left(x_{1,1}\right)^2 + \operatorname{abs}\left(x_{2,1}\right)^2 + \operatorname{abs}(z)^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

2.6. Векторное произведение двух векторов

Векторным произведением вектора $\bar{a}$ на вектор $\bar{b}$ называется такой *третий вектор* $\bar{c}$ (рис. 6), который:

1) имеет *модуль*, численно *равный площади параллелограмма*, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$;

2) *перпендикулярен* к плоскости параллелограмма;

3) *направлен в такую сторону*, с которой кратчайшее *вращение от* $\bar{a}$ к $\bar{b}$ рассматривается совершающимся *против часовой стрелки*. Такое расположение векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ называется *правой связкой*.

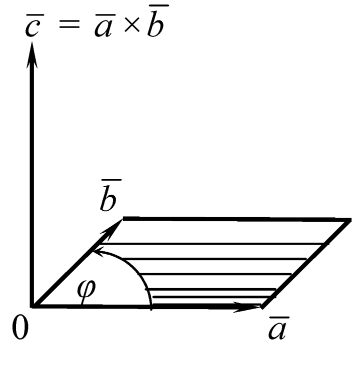


Рис. 6. Геометрический смысл векторного произведения двух векторов

Векторное произведение обозначается: $\bar{a} \times \bar{b}$. Итак, $\bar{a} \times \bar{b} = \bar{c}$, если:

1) $\bar{c} = |\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}| \sin \varphi$;

2) $\bar{c}$ перпендикулярен $\bar{a}$ и $\bar{c}$ перпендикулярен $\bar{b}$;

3) $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ составляют *правую связку*.

Свойства векторного произведения.

I. $\overline{a}\times\overline{b} = -\overline{b}\times\overline{a}$.

II. $\overline{a}\times(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a}\times\overline{b} + \overline{a}\times\overline{c}$ – *распределительный* закон.

III. Если $\overline{a}\,||\,\overline{b}$, то $\overline{a}\times\overline{b} = 0$; в частности $\overline{a}\times\overline{a} = 0$.

IV. Векторные произведения ортов: $\overline{i}\times\overline{j} = \overline{k}$, $\overline{j}\times\overline{k} = \overline{i}$, $\overline{k}\times\overline{i} = \overline{j}$. Произведение любых двух смежных векторов в последовательности $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$, $\overline{i}$, $\overline{j}$ даёт следующий вектор со знаком плюс, а в обратной последовательности – со знаком минус.

V. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей $\overline{a}\,\{a_x, a_y, a_z\}$ и $\overline{b}\,\{b_x, b_y, b_z\}$:

$$\overline{a}\times\overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

VI. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$S_п = |\overline{a}\times\overline{b}|,$$

а площадь треугольника, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}|\overline{a}\times\overline{b}|.$$

В MathCAD векторным произведением **Cross Product**, по определению, называют вектор, длина которого равна произведению длин исходных векторов на синус угла между ними, а направление его совпадает с направлением перпендикуляра к плоскости этих двух векторов (по правилу «буравчика»). Символически векторное произведение находится как определитель следующей матрицы (для случаев векторов в трёхмерном пространстве):

$$\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x1 & x2 & x3 \\ y1 & y2 & y3 \end{pmatrix},$$

где i, j, k – единичные, взаимно перпендикулярные векторы; $x1$, $x2$, $x3$, $y1$, $y2$, $y3$ – координаты (элементы) перемножаемых векторов.

Обозначается векторное произведение в MathCAD символом «×» (соответствует принятым в математике и физике). Ввести оператор векторного произведения можно либо с панели **Matrix** (кнопка **Cross Product**), либо сочетанием клавиш «Ctrl + 8».

Пример 17. Сила F = (1, –3, –4) приложена в точке A(3, 4, 5). Найти величину и направляющие косинусы момента этой силы относительно точки B(1, 8, 9).

Момент силы относительно точки B вычисляется как векторное произведение $\overline{a}\times\overline{F}$, где $\overline{a}$ – вектор, направленный к точке приложения силы. Величина момента силы определяется как модуль вектора $\overline{a}\times\overline{F}$. Направляющие косинусы момента силы (косинусы углов, образованных вектором с осями координат) вычисляются как отношения соответствующих координат вектора к его длине.

$$F := \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \quad a := A - B \quad a \times F = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad |a \times F| = 6$$

$$\cos(\alpha,\beta,\gamma) := \frac{a \times F}{|a \times F|} \qquad \cos(\alpha,\beta,\gamma) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix}$$

Векторные произведения вычисляются системой MathCAD и символически:

$$a \times F \rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \quad |a \times F| \rightarrow 6 \quad \cos(\alpha,\beta,\gamma) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{-1}{3} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.7. Смешанное произведение трёх векторов

Смешанным произведением векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ называется выражение вида $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$.

Если векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ заданы своими координатами, то

$$(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения.

I. От перестановки двух любых сомножителей смешанное произведение меняет знак: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = -(\bar{a} \times \bar{c}) \cdot \bar{b} = -(\bar{c} \times \bar{b}) \cdot \bar{a}$.

II. Если два из трёх векторов равны или параллельны, то их смешанное произведение равно нулю.

III. Знаки операций «точка» и «крест» можно поменять местами, $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c})$; поэтому смешанное произведение принято записывать в виде $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$, то есть без знаков действий и без скобок.

IV. Объём параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$:

$$V = \pm \bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} \begin{cases} + \text{ при правой связке,} \\ - \text{ при левой связке.} \end{cases}$$

Объём пирамиды, построенной на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$: $V_{\text{пир}} = \pm\frac{1}{6}\,\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$.

V. Если $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ *компланарны*, то $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = 0$, и обратно. При этом между $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ существует *линейная зависимость* вида $\overline{c} = m\overline{a} + n\overline{b}$.

Смешанным произведением трёх векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, обозначаемым в математике $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$, называется число, полученное путём умножения вектора $\overline{a}\,\overline{b}$ на вектор $\overline{c}$: $\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}$, где $\overline{a}\cdot\overline{b}$ – векторное произведение $\overline{a}$ и $\overline{b}$. В системе MathCAD нет оператора смешанного произведения векторов, однако его можно легко вычислить двумя способами, задействовав операторы векторного «Ctrl+8» и скалярного «·» произведений или в виде определителя, составленного из координат векторов (реализуется только для декартовой системы координат):

$$\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} = \left|\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{pmatrix}\right|.$$

С геометрической точки зрения модуль смешанного произведения $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$, которые имеют общее начало. Если произведение $\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$ равно нулю, то векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ лежат в одной плоскости (компланарны).

Пример 18. Доказать, что векторы $\overline{a} = -\overline{i} + 3\overline{j} + 2\overline{k}$, $\overline{b} = 2\overline{i} - 3\overline{j} - 4\overline{k}$ и $\overline{c} = -3\overline{i} + 12\overline{j} + 6\overline{k}$ компланарны.

Записываем векторы в форме матриц-столбцов и вычисляем смешанное произведение:

$$\mathrm{a} := \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{b} := \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{c} := \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{a}\times\mathrm{b}\cdot\mathrm{c} = 0\ .$$

Смешанное произведение равно нулю, значит, векторы лежат в одной плоскости.

Пример 19. Вершины треугольной пирамиды *ABCD* находятся в точках *A*(4, 4, 5), *B*(7, 5, 2) и *C*(2, 2, 3). Её объём равен 6. Найти координаты четвёртой вершины *D*, если известно, что она лежит на *Ox*.

Так как вершина *D* принадлежит оси *Ox*, её координаты по оси *Oy* и *Oz* равны нулю. Координату по оси *Ox* точки *D* обозначим неизвестной *x*:

$$A := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\ B := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\ C := \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}\ D := \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Определим координаты векторов $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, образующих боковые рёбра пирамиды (за основание пирамиды принимаем треугольник *ABD*):

$$\overrightarrow{CA} = C - A,\ \overrightarrow{CB} = C - B,\ \overrightarrow{CD} = C - D;$$

$$\overrightarrow{CA} \rightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CD} \rightarrow \begin{pmatrix} 2-\mathrm{x} \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Объём треугольной пирамиды *ABCD* равен 1/6 объёма параллелепипеда, рёбра которого при вершине *C* образованы боковыми рёбрами пирамиды. Объём такого параллелепипеда можно вычислить как смешанное произведение векторов $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Воспользуемся функцией augment, чтобы объёдинить их в единую матрицу:

$$\text{augment (CB, CA, CD)} \rightarrow \begin{pmatrix} -5 & -2 & 2-x \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим (в символьном виде) определитель полученной матрицы:

$$\left|\begin{pmatrix} -5 & -2 & 2-x \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}\right| \rightarrow 4 - 8 \cdot x.$$

Тройка векторов $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CD}$ может быть как левой, так и правой, поэтому при нахождении абсциссы точки *D* необходимо принять во внимание два случая и записать выражение для объёма параллелепипеда под знаком модуля (смена направления поворота равносильна перестановке двух столбцов определителя). Решив уравнение относительно *x*, определим координаты точки *D*, удовлетворяющие условию:

$$|4 - 8 \cdot x| = 6 \cdot 6 \text{ solve}, x \rightarrow \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, вершина *D* имеет координаты (–4, 0, 0), если тройка векторов правая, и (–5, 0, 0), если тройка векторов левая.

2.8. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется обратной к матрице *A*, если $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где *E* – единичная матрица (матрица, у которой элементы главной диагонали равны 1, а все остальные – 0). Матрица имеет обратную только в том случае, если она квадратная и её определитель не равен нулю. Определение обратной матрицы – одна из основных задач матричной алгебры, поскольку в подавляющем большинстве доказательств и выводов этого раздела математики приходится использовать обратную матрицу. При помощи MathCAD можно предельно упростить эту очень трудоёмкую и порой весьма сложную задачу. Оператор нахождения обратной матрицы **Inverse** можно ввести при помощи специальной кнопки панели **Matrix**. Однако можно обойтись и без обращения к рабочей панели: достаточно просто выделить матрицу и возвести её в степень –1 аналогично числам и выражениям.

Находить обратную матрицу можно как для матриц с элементами числами, так и для матриц, элементы которых определены символьно, задействовав при этом оператор символьного вычисления обратной матрицы, который находится на панели **Symbolic**.

Пример 20. Вычисление обратной матрицы.

$$\begin{pmatrix} 32 & 24 & 17 \\ 15 & 42 & 73 \\ 37 & 16 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -0.096 & 0.015 & 0.103 \\ 0.262 & -0.047 & -0.207 \\ -0.131 & 0.037 & 0.098 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 32 & 24 & 17 \\ 15 & 42 & 73 \\ 37 & 16 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \rightarrow \frac{1}{10030} \cdot \begin{pmatrix} -958 & 152 & 1038 \\ 2626 & -469 & -2081 \\ -1314 & 376 & 984 \end{pmatrix}$$

В приведённом выше примере использован численный и символьный способы вывода результата операции. Если все элементы матрицы правой части выражения, полученного во втором случае, умножить на $\frac{1}{10030}$, то получим матрицу, полученную в первом случае.

2.9. Системы линейных уравнений

Очень часто в электротехнике при расчёте цепей постоянного тока расчёт сводится к решению системы линейных уравнений.

Система *двух линейных уравнений с двумя неизвестными*

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{aligned}\right\}$$

имеет решение:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

при условии, что определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Система *двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными*

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{aligned}\right\}$$

имеет решения, определяемые формулами:

$$x = k\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad y = -k\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad z = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix},$$

где k – произвольное число.

Система *трёх однородных уравнений с тремя неизвестными*

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0 \end{aligned}\right\}$$

имеет отличные от нуля решения, если определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0, \text{ и обратно.}$$

Система *трёх линейных уравнений с двумя неизвестными*

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{aligned}\right\}$$

совместна, когда $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0$ и система не содержит попарно противоречивых уравнений.

Система *трёх линейных уравнений с тремя неизвестными*

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{aligned}\right\}$$

при условии, что определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

имеет следующее единственное решение:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta},$$

где

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}.$$

Если определитель системы $\Delta = 0$, то возможны два предположения.

I. Элементы двух строк определителя Δ *пропорциональны*, например $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = m$. Тогда $a_2x + b_2y + c_2z = m(a_1x + b_1y + c_1z)$ и

1) если $d_2 \neq md_1$, то *система несовместна* (первые два уравнения противоречивы);

2) если $d_2 = md_1$, то *система неопределённа* (если первое и третье уравнения не противоречивы).

II. В определителе Δ нет строк с пропорциональными элементами. Тогда существуют отличные от нуля числа m и n такие, при которых $m(a_1x + b_1y + c_1z) + n(a_2x + b_2y + c_2z) = a_3x + b_3y + c_3z$, и

1) если $md_1 + nd_2 \neq d_3$, то *система несовместна*;

2) если $md_1 + nd_2 = d_3$, то *система неопределённа*.

Числа m и n можно подобрать по соображению или же найти их из уравнений $a_1m + a_2n = a_3$, $b_1m + b_2n = b_3$, $c_1m + c_2n = c_3$.

Используя возможности MathCAD по вычислению обратных матриц, можно очень быстро и просто решать системы линейных уравнений как это сделано в следующих примерах.

Пример 21. Пересекаются ли в одной точке прямые, заданные уравнениями

$$\left.\begin{aligned} 2x - 3y &= 6, \\ 3x + y &= 9, \\ x + 4y &= 3 \end{aligned}\right\} ?$$

Выполнить построение.

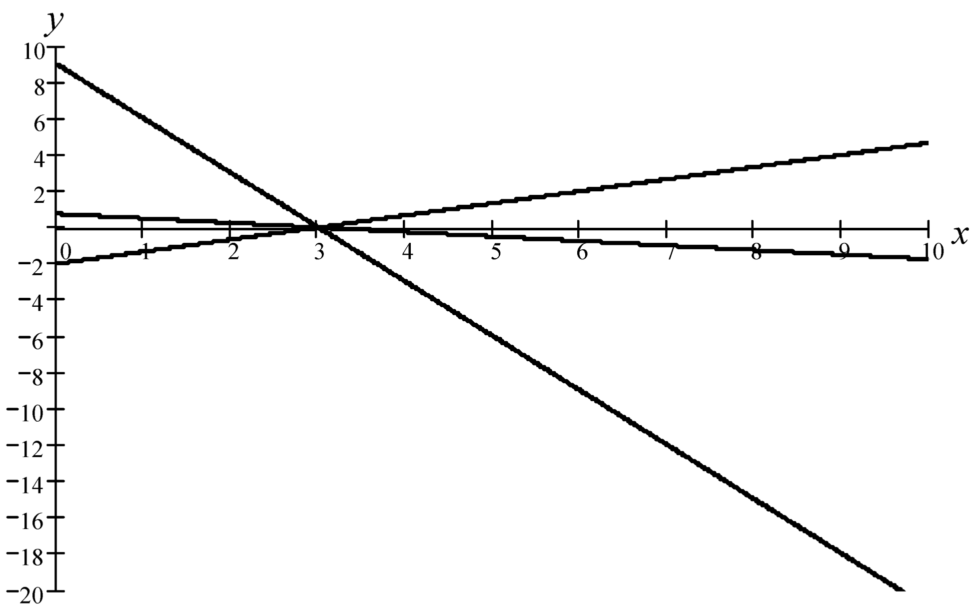


Рис. 7. Построение прямых

Прямые пересекаются в точке с координатами (3, 0) (рис. 7).

Пример 22. Электрическая цепь описывается следующей системой линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} 2I_1 - I_2 + I_3 &= 2; \\ 3I_1 + 2I_2 + 2I_3 &= -2; \\ I_1 - 2I_2 + I_3 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

Определить токи I_1, I_2 и I_3.

Составим матрицу системы (матрицу коэффициентов уравнений системы) и вектор правых частей уравнений. Умножив обратную матрицу коэффициентов уравнений системы на вектор правых частей уравнений, получаем вектор решений системы уравнений.

$$M := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} \cdot V = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $I_1 = 2$ А, $I_2 = -1$ А и $I_3 = -3$ А.

2.10. Возведение матрицы в степень и матричные уравнения

Система MathCAD позволяет проводить операции возведения матрицы в степень. Если матрица квадратная, её можно возвести в степень n, где n – любое целое число или ноль. При этом:

если $n = 0$, то $M^n = E$, где E – единичная матрица;

если $n = 1$, то $M^1 = M$ (матрица, возведённая в первую степень, равна самой себе;

если $n = N$, где N – любое натуральное число, равное или большее двух, то степень матрицы определяется как произведение соответствующего числа матриц первой степени;

если $n = -1$, то M^{-1} – матрица обратная данной;

если $n = R$, где R – любое целое отрицательное число, меньшее либо равное -2, то аналогично возведению в положительную степень, M^R определяется как произведение нужного числа обратных матриц.

Задаётся степень матрицы аналогично случаям с числами или выражениями: либо при помощи кнопки **Raise to Power** (Возведение в степень) рабочей панели **Calculator**, либо сочетанием клавиш « Shift + 6 ».

Пример 23. Возведение матрицы в степень.

$$\begin{pmatrix} 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 \\ 27 & 25 & 26 \end{pmatrix}^{-2} = \begin{pmatrix} 5.667 & -5.333 & 0.333 \\ -77.778 & 77.444 & -8.667 \\ 69.222 & -69.222 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 \\ 27 & 25 & 26 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -0.333 & 0.333 \\ -8.667 & 8.333 & -0.667 \\ 8.333 & -7.667 & 0.333 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 \\ 27 & 25 & 26 \end{pmatrix}^{1} = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 \\ 27 & 25 & 26 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 \\ 27 & 25 & 26 \end{pmatrix}^{0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 21 & 22 & 23 \\ 24 & 25 & 26 \\ 27 & 25 & 26 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 1.59 \times 10^{3} & 1.587 \times 10^{3} & 1.653 \times 10^{3} \\ 1.806 \times 10^{3} & 1.803 \times 10^{3} & 1.878 \times 10^{3} \\ 1.869 \times 10^{3} & 1.869 \times 10^{3} & 1.947 \times 10^{3} \end{pmatrix}$$

Большое значение в линейной алгебре и особенно в теории оптимизации имеют матричные уравнения. Решить их можно при помощи блока **Given−Find**.

Пример 24. Найти матрицу X, удовлетворяющую $X^2 - X = M$, где M – некоторая квадратная матрица.

Задаём матрицу M:

$$M := \begin{pmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \\ 102 & 126 & 150 \end{pmatrix}.$$

Указываем начальное приближение для используемого численного алгоритма:

$$X := 0.001M.$$

Указываем вид уравнения в блоке Given−Find и присваиваем матрицу с решением переменной R:

Given

$X^2 - X = M$

$R := \mathrm{find}(X).$ Проверяем решение на верность:

$$R = \begin{pmatrix} -2.106 & -2.626 & -2.146 \\ -4.355 & -4.22 & -6.084 \\ -5.604 & -7.814 & -9.023 \end{pmatrix} \qquad R^2 - R = \begin{pmatrix} 30 & 36 & 42 \\ 66 & 81 & 96 \\ 102 & 126 & 150 \end{pmatrix}.$$

Аналогично численному решению простых уравнений, решение матричных уравнений зависит от параметра начального приближения. Символьно решать матричные уравнения MathCAD не может.

2.11. Матричные функции

Матричные функции можно просто набрать с клавиатуры, либо воспользоваться списком **Insert Function**, который открывается командой **Function** меню **Insert**.

Существует целый ряд матриц *специального вида* (верхние и нижние треугольные, единичные, трапециевидные, скалярные, нулевые и некоторые другие). В MathCAD имеется несколько функций, которые позволяют быстро и просто задавать матрицы специального вида:

identity(*N*) – функция служит для задания единичной матрицы размерности N;

diag(*V*) – функция создаёт матрицу, элементы главной диагонали которой равны соответствующим элементам вектора $\overline{V}$;

geninv(*M*) – функция определения обратной матрицы.

Пример 25. Задание матриц специального вида.

$$\text{identity}(3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad V := \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad \text{diag}(V) \rightarrow \begin{pmatrix} m_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & m_{2,1} & 0 \\ 0 & 0 & m_{3,1} \end{pmatrix}$$

$$\text{diag}(V) = \begin{pmatrix} \{3,1\} & 0 & 0 \\ 0 & \{3,1\} & 0 \\ 0 & 0 & \{3,1\} \end{pmatrix}$$

$$M := \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & 8 \\ 6 & 43 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{geninv}(M) = \begin{pmatrix} -1.042 & 0.591 & 0.097 \\ 0.055 & -0.045 & 0.018 \\ 0.782 & -0.318 & -0.073 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} -1.042 & 0.591 & 0.097 \\ 0.055 & -0.045 & 0.018 \\ 0.782 & -0.318 & -0.073 \end{pmatrix}$$

2. 12. Функции слияния матриц

Иногда при решении различных задач требуется слияние нескольких векторов или матриц. В MathCAD для этих целей применяются следующие функции:

augment(*A*, *B*,…), где A, B – некоторые матрицы. Эта функция служит для слияния матриц слева направо. Соединяемые матрицы должны иметь одинаковое количество строк;

stack(*A*, *B*,…). Эта функция служит для слияния матриц сверху вниз. Соединяемые матрицы должны иметь равное число столбцов.

Пример 26. Слияние матриц.

$$M1 := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad M2 := \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{augment}(M1, M2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{stack}(M1, M2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \\ 3 & 4 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

2.13. Вычисление ранга матрицы

Ранг матрицы равен порядку наибольшего отличного от нуля минора матрицы. Эта величина служит для характеристики *матрицы системы уравнений* и как параметр, определяющий *базис пространства* (какой размерности может быть данное множество векторов).

Для вычисления ранга матрицы в MathCAD существует специальная функция **rank(M)**.

В примере 27 у матрицы M3 все три строки линейно независимы, у матрицы M4 имеются две линейно зависимые строки и у матрицы M5 все строки линейно зависимы.

Пример 27. Вычисление ранга матрицы.

$$M3 := \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 11 & 14 & 15 \\ 14 & 17 & 18 \end{pmatrix} \qquad M4 := \begin{pmatrix} 19 & 20 & 21 \\ 20 & 30 & 30 \\ 20 & 30 & 30 \end{pmatrix} \qquad M5 := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{rank}(M3) = 3 \qquad \mathrm{rank}(M4) = 2 \qquad \mathrm{rank}(M5) = 1$$

3. Комплексные числа

Комплексным числом называется выражение вида $x + yi$ (*алгебраическая* форма записи комплексного числа), в котором x и y – вещественные числа, а i – некоторый символ, если при этом приняты условия:

1) $x + 0i = x$, $0 + yi = yi$ и $1i = i$, $(-1)i = -i$;

2) $x + yi = x_1 + y_1 i$ тогда и только тогда, когда $x = x_1$ и $y = y_1$;

3) $(x + yi) + (x_1 + y_1 i) = (x + x_1) + (y + y_1)i$;

4) $(x + y\,i)(x_1 + y_1 i) = (xx_1 - yy_1) + (xy_1 + x_1 y)i$.

Из условий 1 и 4 получаются степени числа i:

$$i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i \text{ и т.д.}$$

Комплексное число $x + yi$, в котором $x = 0$, а $y \neq 0$, называется *мнимым числом*. Число i называется *мнимой единицей.*

Сложение, вычитание, умножение и возведение в степень комплексных чисел в алгебраической форме записи можно выполнять по правилам этих действий над многочленами.

Деление комплексных чисел и извлечение корня из комплексного числа определяются как действия обратные.

Геометрический смысл комплексного числа заключается в том, что комплексное число $x + yi$ определяется парой вещественных чисел (x, y) на координатной плоскости (в электротехнике на комплексной плоскости) и изображается точкой $M(x_м, y_м)$ или её радиусом−вектором $\bar{r} = \overrightarrow{OM}$ (рис. 8). Длина этого вектора $|\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется *модулем* комплексного числа, а угол его φ с осью Ox называется *аргументом* комплексного числа.

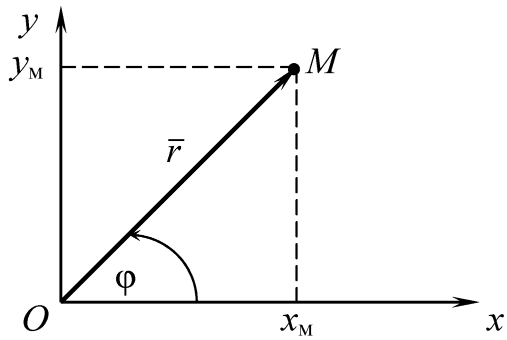


Рис. 8. Геометрический смысл комплексного числа

Так как $x_м = |\bar{r}|\cos\varphi$, а $y_м = |\bar{r}|\sin\varphi$, тогда получим *тригонометрическую форму* записи комплексного числа:

$$x + yi = |\bar{r}|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня из комплексных чисел в тригонометрической форме осуществляется по формулам Муавра:

$$|\bar{r}|(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot|\bar{r}_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = (|\bar{r}|\cdot|\bar{r}_1|)\cdot[\cos(\varphi + \varphi_1) + i\sin(\varphi + \varphi_1)];$$

$$\frac{|\bar r|(\cos\varphi+\sin\varphi)}{|\bar r_1|(\cos\varphi_1+\sin\varphi_1)}=\frac{|\bar r|}{|\bar r_1|}[\cos(\varphi-\varphi_1)+i\sin(\varphi-\varphi_1)];$$

$$[|\bar r|(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^{n}=|\bar r^{\,n}|(\cos n\varphi+i\sin n\varphi);$$

$$\sqrt[n]{|\bar r|(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{|\bar r|}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$.

$|\bar r|\cdot e^{i\varphi}$ – *показательная* (экспоненциальная) форма записи комплексного числа, которая вытекает из формулы Эйлера: $e^{i\varphi} = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.

Логарифм комплексного числа:

$$\ln z = \ln r + i\varphi_0 + i2k\pi,$$

где φ_0 – значение аргумента φ, удовлетворяющее неравенству: $-\pi < \varphi \le \pi$. Выражение $\ln r + i\varphi_0$ называется *главным значением* логарифма.

Одним из больших достоинств системы MathCAD является наличие полной поддержки работы с комплексными числами в их традиционной форме представления (калькуляторы и электронные таблицы обычно рассматривают комплексные числа как пару действительных). Более того, комплексные числа – это основной тип чисел в MathCAD. Большинство математических операций программа по умолчанию проводит именно над комплексными числами. К примеру, при аналитическом и численном решении уравнений определяются как действительные, так и мнимые корни. Функция комплексного переменного может быть легко проинтегрирована. Большинство встроенных функций может принимать как действительные, так и комплексные аргументы. Многие встроенные функции сами могут возвращать комплексные значения при определённых величинах аргументов. Например, логарифм от отрицательного числа в MathCAD существует и равен соответствующему комплексному числу.

Пример 28. Комплексные числа в расчётах различных типов.

MathCAD позволяет найти квадратный корень и логарифм от отрицательного числа:

$\sqrt{-3} = 1.732i \qquad \ln(-23) = 3.135 + 3.142i$.

При проведении операций над комплексными числами и выводе результата в численном и аналитическом виде могут быть получены и комплексные корни.

$(2 + j)(7 - 3j)$

14-6i
21-9i
28-12i
35-15i
42-18i
49-21i

$$(2+j)(7-3j)\rightarrow\begin{pmatrix}14-6\cdot i\\21-9\cdot i\\28-12\cdot i\\35-15\cdot i\\42-18\cdot i\\49-21\cdot i\end{pmatrix}$$

$x := 2 + j \qquad x^2 + 1 = 4 + 4i \qquad x^2 + 2x + 1 \to 8 + 6\cdot i.$

При проведении математических операций следует помнить, что для большинства из них имеют смысл и комплексные операнды. Поэтому, получив, например, мнимое значение интеграла, необходимо проверить правильность определения пределов.

$$\int_{-e}^{e} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx \text{ simplify } \to -2\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\right) + 2\cdot i\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\right) + 2\cdot\exp\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\pi$$

$$\int_{-e}^{e} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx = 7.062 + 3.297i \qquad \ln(x) = 0.805 + 0.464i\ .$$

Большим достоинством MathCAD является то, что комплексное число может быть не только непосредственно получено при вычислениях, но и быть использовано в них в качестве переменной или параметра. Эффективность расчёта при этом совершенно не снизится.

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0.538 - 1.101i \qquad \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -0.145 + 0.803i$$

$$\int_{-2+j}^{2+j} e^{-x}\,dx \to -\exp(-7) + \exp(-3) \qquad e^j = \qquad e^i =$$

7.254
2.668
0.982
0.361
0.133
0.049

1
2.718
7.389
20.086
54.598
148.413

1
2.718
7.389
20.086
54.598
148.413

Введение комплексного числа в MathCAD имеет некоторые особенности. Проще всего можно ввести мнимую единицу, использовав соответствующую кнопку панели **Calculator**. Для того чтобы задать мнимую единицу с клавиатуры, нельзя просто нажать клавишу « *i* », так как она будет воспринята системой как неизвестная переменная. Для корректного задания мнимой единицы вначале вводят цифру 1 и лишь затем « *i* » (но не $1\cdot i$).

В литературе иногда принято обозначать мнимую единицу не как *i*, а как *j*. В MathCAD имеется возможность замены символа мнимой единицы при помощи опции **Imaginary Value** (Мнимая единица) закладки **Display Options** (Опции отображения) панели **Result Format** (Формат результата) меню **Format** (Формат). Однако изменения, произведённые описанным параметром, коснутся лишь выражений ответа. Для задания же исходных данных с мнимым числом в виде буквы *j* нужно просто непосредственно ввести его с клавиатуры.

Пример 29. Отображение мнимой единицы различными символами.

$$e^{j} = 0.54 + 0.841i \qquad e^{i} = 0.54 + 0.841i \ .$$

3.1. Основные характеристики комплексных чисел

В MathCAD имеется несколько величин, позволяющих охарактеризовать комплексное число $z = a + b \cdot i$. Для их определения используются *специальные функции и операторы*:

<u>действительная часть</u> a − для её определения служит функция Re(z);

<u>мнимая часть</u> b находится с использованием функции Im(z);

<u>модуль комплексного числа</u> $|z|$ − ему соответствует длина вектора, соединяющего начало координат и точку числа на комплексной плоскости. Значение модуля комплексного числа позволяет определить оператор модуля панели **Calculator**;

<u>сопряжённое число</u> z^* − это такое комплексное число, при умножении которого на z получается действительное число. Тогда $z^* = a - b \cdot i$, а $z \cdot z^* = |z|^2$. Найти z^* в MathCAD позволяет особый оператор *комплексного сопряжения*. Ввести данный оператор можно при помощи сочетания клавиш « Shift + “ ». Обязательное условие при этом – курсор должен находиться на тексте преобразуемого выражения, иначе будет вставлена текстовая область, вводимая тем же сочетанием. Оператор сопряжённого числа по-своему уникален: это единственный из операторов в MathCAD, который не был вынесен ни на одну из панелей семейства Math;

<u>аргумент комплексного числа</u> – это угол наклона φ вектора, соединяющего в комплексной плоскости начало координат и точку числа. Численно равен арктангенсу отношения мнимой части числа к действительной части arg(z) = arctg(b/a). Для определения аргумента комплексного числа в MathCAD служит функция arg(z). С учётом периодичности, аргумент комплексного числа имеет бесконечное множество значений, определяемых соотношением φ = arg(z) + $2 \cdot p \cdot k$, где k – любое целое число.

Все описанные выше функции и операторы работают как в режиме аналитических, так и численных расчётов.

Пример 30. Расчёт основных характеристик комплексного числа.

Присваиваем число переменной и пересчитываем его в форму $z = a + b \cdot i$.

$$z := \left(\frac{1+i}{1-i} + \frac{3}{1+2i}\right) \to \frac{3}{5} - \frac{1}{5} \cdot i \quad z + 5z \to \frac{18}{5} - \frac{6}{5} \cdot i \quad z = 0.6 - 0.2i \ \ 5z = 3 - i$$

Находим действительную и мнимую части числа, его аргумент, модуль и сопряжённое число:

$$\mathrm{Im}(z) \to \frac{-1}{5} \qquad \mathrm{Re}(z) \to \frac{3}{5} \qquad \arg(z) \to -\mathrm{atan}\left(\frac{1}{3}\right) \quad |z| \to \frac{1}{5} \cdot 10^{\frac{1}{2}} \quad \bar{z} \to \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot i$$

$\mathrm{Im}(z) = -0.2$ $\mathrm{Re}(z) = 0.6$ $\arg(z) = -0.322$ $\arg(z) = -18.435\,\mathrm{deg}$

$|z| = 0.632$ $\bar{z} = 0.6 + 0.2i$ $(|z|)^2 = 0.4$ $z\cdot\bar{z} = 0.4$ $\sqrt{z\cdot\bar{z}} = 0.632$

$$\sqrt{z\cdot\bar{z}} \rightarrow \frac{1}{5}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{2}}.$$

3.2. Формы представления комплексных чисел

Известны три формы представления комплексного числа: алгебраическая, тригонометрическая и экспоненциальная (показательная). MathCAD умеет полноценно работать только с комплексными числами, представленными в алгебраической форме. Именно в ней чаще всего представляются результаты аналитических расчётов, и только в ней – численных. В тригонометрическую форму программа переводит только числа, представленные в экспоненциальной форме и упрощаемые при помощи оператора **Complex** панели **Symbolic**. И нет такой операции, в результате которой было бы получено комплексное число в экспоненциальной форме (если не считать операции символьного интегрирования e^x от $-i$ до i).

$$\int_{-i}^{i} e^{x}\,dx \rightarrow \exp(i) - \exp(-i)$$

Для представления результата в тригонометрической или экспоненциальной форме существует два способа.

<u>Первый способ</u>. Подсчитав модуль и аргумент комплексного числа, самостоятельно составляется нужное выражение.

<u>Второй способ</u>. Можно создать функцию, которая будет записывать строку с ответом. У этого способа есть недостатки. Полученный ответ нельзя будет использовать в дальнейших расчётах. Кроме того, подобная функция не может быть просчитана аналитически. Однако ничего лучшего для автоматизации преобразования комплексных чисел из одной формы в другую в MathCAD сделать нельзя.

Рассмотрим оба способа перевода комплексных чисел из алгебраической формы в тригонометрическую и экспоненциальную.

Пример 31. Представить число $m = 1 + i$ в тригонометрической и экспоненциальной формах.

Чтобы решить задачу первым способом, находим модуль числа и его аргумент, а затем подставляем их в формулы:

$$m := 1 + i \qquad \arg(m) \rightarrow \frac{1}{4}\cdot\pi \qquad |m| \rightarrow 2^{\frac{1}{2}}.$$

Тригонометрическая форма: $\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$.

Экспоненциальная форма: $\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}$.

Выполняем проверку (система пересчитывает число из любого представления в алгебраическое: $\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)=1+i$, $\sqrt{2}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{4}}=1+i$.

expC(1 + i) = "1.4142135623731*(e^i*0.785398163397448)"

Второй способ заключается в том, что формируется строка с ответом. Для этого используется функция **concat**, объединяющая подстроки в одну строку. Для перевода чисел в строки применяется функция **num2str**.

expC(z) := concat(num2str(|z|) ,"*(e^i*" ,num2str(arg(z)) ,")")

Довольно часто комплексные числа получаются в форме, в которой действительная и мнимая части не разделены. Чтобы привести такое число к алгебраической форме, следует использовать оператор **Complex**, который переводит числа из экспоненциальной формы в тригонометрическую.

Пример 32. Использование оператора Complex.

$\frac{5+i}{2+3\cdot i}$ complex $\rightarrow 1-i$ $\qquad$ $5\cdot e^{4\cdot i}$ complex $\rightarrow 5\cdot\cos(4)+5\cdot i\cdot\sin(4)$

3.3. Операции над комплексными числами

Такие арифметические операции, как сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень над комплексными числами в системе MathCAD можно осуществлять точно так же, как и над действительными числами. Причём расчёт может быть проведён как аналитически, так и численно.

Пример 33. Элементарные операции над комплексными числами.

$z1 := i+1 \qquad z2 := 3-12\cdot i$

$z1+z2=4-11i \qquad z1-z2=-2+13i \qquad z1\cdot z2=15-9i$

$\frac{z1}{z2}=-0.059+0.098i \qquad \frac{z1}{z2}\rightarrow\frac{-1}{17}+\frac{5}{51}\cdot i$

$z1^3=-2+2i \qquad z1^3\rightarrow -2+2\cdot i \qquad \sqrt{z1}\rightarrow(1+i)^{\frac{1}{2}}$

$z2^5\rightarrow 272403-98172\cdot i \qquad z2^5=2.724\times10^5-9.817i\times10^4$

$\sqrt[3]{z1}=1.084+0.291i \qquad \sqrt[3]{z1}\rightarrow(1+i)^{\frac{1}{3}} \qquad \sqrt{z1}=1.099+0.455i$.

Заключение

MathCAD является математическим редактором, позволяющим проводить разнообразные научные и инженерные расчёты, начиная от элементарной математики и заканчивая сложными реализациями численных методов. Благодаря простоте применения, наглядности математических действий, обширной библиотеке встроенных функций и численных методов, возможности символьных вычислений, а также превосходному аппарату представления результатов (графики разных типов, мощных средств подготовки печатных документов), MathCAD стал наиболее популярным математическим приложением.

В отличие от большинства других современных математических приложений, он построен в соответствии с принципом WYSIWYG (“What You See Is What You Get” – «что Вы видите, то и получите»). Поэтому он очень прост в использовании в частности из-за отсутствия необходимости сначала писать программу, реализующую те или иные математические расчёты, а потом запускать её на исполнение. Вместо этого достаточно просто вводить математические выражения с помощью встроенного редактора формул, причём в виде максимально приближённом к общепринятому, и тут же получать результат. Кроме того, можно изготовить на принтере печатную копию документа именно в том виде, который этот документ имеет на экране компьютера при работе с MathCAD. Создатели MathCAD сделали всё возможное, чтобы пользователь, не обладающий специальными знаниями в программировании, мог в полной мере приобщиться к достижениям современной вычислительной науки и компьютерных технологий. Для эффективной работы с редактором MathCAD достаточно базовых навыков пользователя.

При изучении электротехнических дисциплин студентам приходится решать одну или несколько из следующих задач:

ввод на компьютере разнообразных математических выражений (для дальнейших расчётов или создания документов);

проведение математических расчётов;

подготовка графиков с результатами расчётов;

ввод исходных данных и вывод результатов в текстовые файлы или файлы с базами данных в других форматах;

подготовка отчётов по контрольным и лабораторным работам, курсовым и дипломным проектам в виде печатных документов;

получение различной справочной информации из области математики.

Со всеми этими (а также некоторыми другими) задачами с успехом справляется MathCAD:

математические выражения и текст вводятся с помощью формульного редактора MathCAD, который по возможностям и простоте использования не уступает, к примеру, редактору формул, встроенному в Microsoft Word;

математические расчёты производятся немедленно, в соответствии с введёнными формулами;

графики различных типов (по выбору пользователя) с богатыми возможностями форматирования вставляются непосредственно в документы;

возможен ввод и вывод данных в файлы различных форматов;

документы могут быть распечатаны непосредственно в MathCAD в том виде, который пользователь видит на экране компьютера, или сохранены в формате RTF для последующего редактирования в более мощных текстовых редакторах (например, Microsoft Word);

имеется опция объединения разрабатываемых документов в электронные книги, которые, с одной стороны, позволяют в удобном виде хранить математическую информацию, а с другой – являются полноценными MathCAD-программами, способными осуществлять расчёты;

символьные вычисления позволяют осуществлять аналитические преобразования, а также мгновенно получать разнообразную справочную математическую информацию.

Таким образом, в состав MathCAD входят несколько интегрированных между собой компонентов – это мощный текстовый редактор для ввода и редактирования как текста, так и формул, вычислительный процессор – для проведения расчётов согласно введённым формулам и символьный процессор, являющийся по сути системой искусственного интеллекта. Сочетание этих компонентов создаёт удобную вычислительную среду для математических расчётов и, одновременно, документирования результатов работы.

В данном пособии изложены элементы векторной алгебры и матричного исчисления, которые нашли широкое применение при расчёте электрических цепей и могут быть использованы студентами, изучающими электротехнические дисциплины.

Библиографический список

Основной:

1. Кирьянов Д.В. Самоучитель Mathcad 11. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003.

2. Гурский Д.А., Турбина Е.Н. Mathcad для студентов и школьников: Популярный самоучитель. – СПб.: Питер, 2005.

Дополнительный:

3. Дембовский В.В. Компьютерные технологии в металлургии и литейном производстве: Учеб. пособие: В 2ч. Ч. 2. – СПб.: СЗТУ, 2002.

4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по высшей математике для инженеров и учащихся втузов: 13-е изд. – М.: 1986.

5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: 11-е изд. – М.: Наука, 1971.

6. Иванов И.И., Равдоник В.С. Электротехника: Учеб. пособие для неэлектротехнических специальностей вузов. – М.: Высшая школа, 1984.

Приложения. Примеры решения задач по электротехнике

Приложение 1. Расчёт электрических цепей постоянного тока

Если большое число пассивных элементов вместе с источником ЭДС образует электрическую цепь, то их взаимное соединение может быть выполнено тремя способами: последовательно, параллельно или смешанно.

Последовательное соединение элементов – это такое соединение, при котором во всех элементах цепи протекает один и тот же ток I, а напряжение на зажимах цепи U, будет равно сумме падений напряжения на n последовательно включённых пассивных элементах (рис.9), то есть

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots + U_n,$$

или

$$U = R_1I + R_2I + R_3I + \ldots + R_nI = (R_1 + R_2 + R_3 + \ldots + R_n)\cdot I = R_{экв}I,$$

где $R_{экв} = \sum_{i=1}^{n} R_i$ – эквивалентное сопротивление цепи.

Таким образом, эквивалентное сопротивление последовательно соединённых пассивных элементов равно сумме сопротивлений этих элементов.

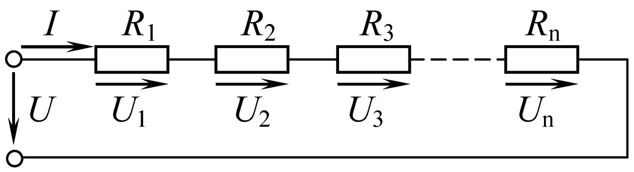


Рис. 9. Последовательное соединение элементов электрической цепи

При расчёте цепи с последовательным соединением элементов при заданных напряжении источника питания и сопротивлениях элементов ток в цепи рассчитывается по закону Ома:

$$I = U/R_{экв}.$$

Падение напряжения на i-м элементе $U = R_iI = R_iU/R_{экв}$ зависит не только от сопротивления этого элемента R_i, но и от эквивалентного сопротивления $R_{экв}$, то есть от сопротивления других элементов цепи.

Так как при последовательном соединении ток во всех элементах цепи один и тот же, то отношение падений напряжения на элементах равно отношению сопротивлений этих элементов:

$$U_i/U_n = R_i/R_n.$$

Пример П.1.1. Электрическая цепь постоянного тока имеет один источник питания напряжением U = 12 В и три пассивных элемента, соединённых последовательно, R_1 = 20 Ом, R_2 = 30 Ом и R_3 = 50 Ом. Определить ток в цепи.

<u>Решение</u>

Рассчитываем эквивалентное сопротивление пассивных элементов:

$$R_{экв} = \sum_{i=1}^{3} R_i = R_1 + R_2 + R_3 = 20 + 30 + 50 = 100 \text{ Ом}.$$

Определяем ток в цепи: $I = U/R_{экв} = 12/100 = 0{,}12$ А.

Параллельное соединение элементов – это такое соединение, при котором ко всем элементам цепи приложено одно и то же напряжение.

Каждый параллельно включённый элемент образует отдельную ветвь (рис. 10), поэтому цепь с параллельным соединением элементов, хотя и является простой (так как содержит только два узла), в то же время разветвлённая.

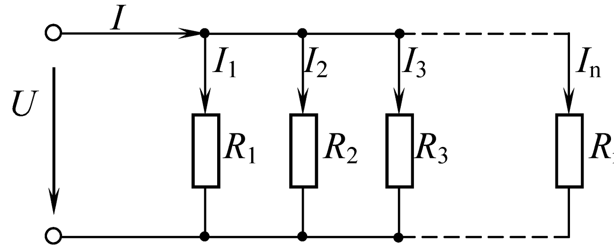


Рис. 10. Параллельное соединение элементов электрической цепи

В каждой параллельной ветви ток

$$I_i = U/R_i = G_i U,$$

где $G_i = 1/R_i$ – проводимость i-й ветви.

По первому закону Кирхгофа

$$I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots + I_n,$$

или

$$I = G_1U + G_2U + G_3U + \ldots + G_nU = (G_1 + G_2 + G_3 + \ldots + G_n)U = G_{экв}U,$$

где $G_{экв} = \sum_{i=1}^{n} G_i$ – эквивалентная проводимость цепи.

Таким образом, эквивалентная проводимость параллельно соединённых пассивных элементов равна сумме проводимостей этих элементов.

Эквивалентной проводимости $G_{экв}$ соответствует эквивалентное сопротивление $R_{экв} = 1/G_{экв}$. Ток в неразветвлённой части цепи с параллельным соединением элементов может быть определён по закону Ома:

$$I = U/R_{экв} = G_{экв}U.$$

Пример П.1.2. Электрическая цепь постоянного тока имеет один источник питания напряжением U = 12 В и три пассивных элемента, соединённых параллельно, R_1 = 20 Ом, R_2 = 30 Ом и R_3 = 50 Ом. Определить ток в неразветвлённой части цепи и в каждой ветви.

Решение

Рассчитываем эквивалентную проводимость пассивных элементов:

$$G_{экв} = \sum_{i=1}^{3} G_i = 1/R_1 + 1/R_2 + 1/R_3 = 0{,}05 + 0{,}033 + 0{,}02 = 0{,}103 \text{ См}.$$

Определяем ток в неразветвлённой части цепи: $I = UG_{экв} = 12 \cdot 0{,}103 = 1{,}24$ А.

Рассчитываем токи в ветвях: $I_1 = U/R_1 = G_1U = 12/20 = 0{,}6$ А; $I_2 = U/R_2 = G_2U = 12/30 = 0{,}4$ А; $I_3 = U/R_3 = G_3U = 12/50 = 0{,}24$ А.

Проверяем по первому закону Кирхгофа: $I = I_1 + I_2 + I_3 = 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}24 = 1{,}24$ А.

Смешанное соединение элементов представляет собой сочетание последовательного и параллельного соединений. Такая цепь может иметь различное число сочетаний узлов и ветвей (рис. 11, *а*).

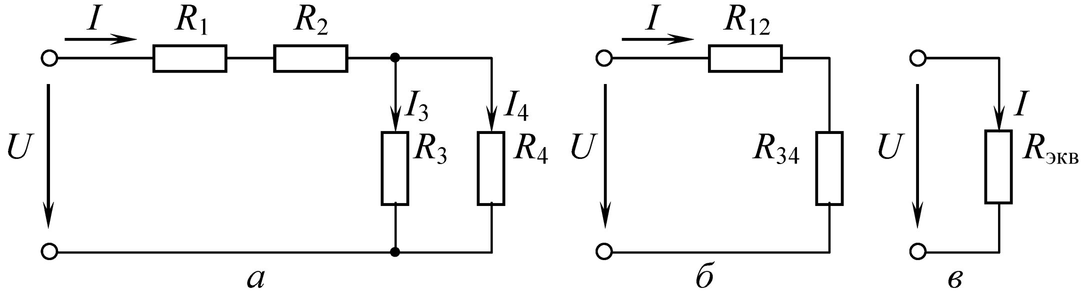


Рис. 11. Смешанное соединение элементов электрической цепи

Для расчёта такой цепи необходимо последовательно определять эквивалентные сопротивления для тех частей схемы, которые представляют собой только последовательное или только параллельное соединение. В рассматриваемой схеме имеется последовательное соединение элементов с сопротивлениями R_1 и R_2 и параллельное соединение элементов с сопротивлениями R_3 и R_4. Используя полученные ранее соотношения между параметрами элементов цепи при последовательном и параллельном их соединении, реальную схему цепи можно последовательно заменить эквивалентными схемами.

Эквивалентное сопротивление последовательно соединённых элементов $R_{12} = R_1 + R_2$. Эквивалентное сопротивление параллельно соединённых элементов R_3 и R_4

$$R_{34} = \frac{1}{G_{34}} = \frac{1}{G_3 + G_4} = \frac{1}{1/R_3 + 1/R_4} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Эквивалентная схема с сопротивлениями элементов R_{12} и R_{34} изображена на рис. 11, *б*. Для этой схемы последовательного соединения R_{12} и R_{34} эквивалентное сопротивление $R_{экв} = R_{12} + R_{34}$, а соответствующая эквивалентная схема представлена на рис. 11, *в*. Ток в этой цепи: $I = U/R_{экв}$.

Это ток источника питания и ток в элементах R_1 и R_2 реальной цепи.

Для расчёта токов I_3 и I_4 определяют напряжение на участке цепи с сопротивлением R_{34} (рис. 11, *б*):

$$U_{34} = R_{34} I = R_{34} U/R_{экв}.$$

Тогда токи I_3 и I_4 можно найти по закону Ома:

$$I_3 = U_{34}/R_3;\ I_4 = U_{34}/R_4.$$

Подобным образом можно рассчитать и ряд других схем электрических цепей со смешанным соединением пассивных элементов.

Пример П.1.3. Электрическая цепь постоянного тока имеет один источник питания напряжением $U = 12$ В и четыре пассивных элемента, соединённых по схеме (рис. 11, *а*), $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом и $R_4 = 40$ Ом. Определить ток в неразветвлённой части цепи и в каждой ветви.

Решение

Рассчитываем эквивалентное сопротивление параллельно соединённых элементов R_3 и R_4

$$R_{34} = \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{30 \cdot 40}{30 + 40} = 17{,}143 \text{ Ом}.$$

Эквивалентное сопротивление последовательно соединённых элементов $R_{12} = R_1 + R_2 = 10 + 20 = 30$ Ом.

Эквивалентное сопротивление $R_{экв} = R_{12} + R_{34} = 30 + 17{,}143 = 47{,}143$ Ом.

Ток в неразветвлённой части цепи $I = U/R_{экв} = 12/47{,}143 = 0{,}255$ А.

Напряжение на участке цепи с сопротивлением R_{34}:

$$U_{34} = R_{34} I = 17{,}143 \cdot 0{,}255 = 4{,}371 \text{ В}.$$

Тогда токи I_3 и I_4 можно найти по закону Ома: $I_3 = U_{34}/R_3 = 4{,}371/30 = 0{,}146$ А; $I_4 = U_{34}/R_4 = 4{,}371/40 = 0{,}109$ А.

Проверяем по первому закону Кирхгофа: $I = I_3 + I_4 = 0{,}146 + 0{,}109 = 0{,}255$ А.

Для сложных схем с большим количеством контуров и источников ЭДС не всегда может быть проведено такое эквивалентное преобразование. Их расчёт ведётся с использованием других методов.

Рассчитаем эти примеры с помощью пакета программ MathCAD.

В примере П.1.1 присваиваем переменным численные значения, записываем формулы, получаем решение и делаем проверку.

$$R_1 := 20 \quad R_2 := 30 \quad R_3 := 50 \quad R_{123} := R_1 + R_2 + R_3 \qquad U := 12 \qquad I := \frac{U}{R_{123}}$$

$$U_1 := I \cdot R_1 \quad U_2 := I \cdot R_2 \quad U_3 := I \cdot R_3 \quad R_{123} = 100 \quad I = 0.12 \quad U_1 + U_2 + U_3 = 12$$

Пример П.1.2.

$$G_{123} := \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \qquad G_1 := \frac{1}{R_1} \quad G_2 := \frac{1}{R_2} \quad G_3 := \frac{1}{R_3}$$

$$I := U \cdot G_{123} \quad I_1 := G_1 \cdot U \quad I_2 := G_2 \cdot U \quad I_3 := G_3 \cdot U$$

$$I = 1.24 \quad I_1 = 0.6 \quad I_2 = 0.4 \quad I_3 = 0.24 \quad I_1 + I_2 + I_3 = 1.24$$

Пример П.1.3.

$$R_1 := 10 \quad R_2 := 20 \quad R_3 := 30 \quad R_4 := 40 \qquad R_{12} := R_1 + R_2 \quad R_{34} := \frac{R_3 \cdot R_4}{R_3 + R_4}$$

$$R_{1234} := R_{12} + R_{34} \qquad I := \frac{U}{R_{1234}} \qquad U_{34} := R_{34} \cdot I$$

$$I_3 := \frac{U_{34}}{R_3} \qquad I_4 := \frac{U_{34}}{R_4}$$

$$I = 0.255 \qquad I_3 + I_4 = 0.255$$

Пример П.1.4. Параметры элементов цепи постоянного тока, показаны на рис. 12. Вычислить токи, протекающие в ветвях схемы и составить уравнение баланса мощностей. Решение задачи выполнить методом непосредственного применения законов Кирхгофа.

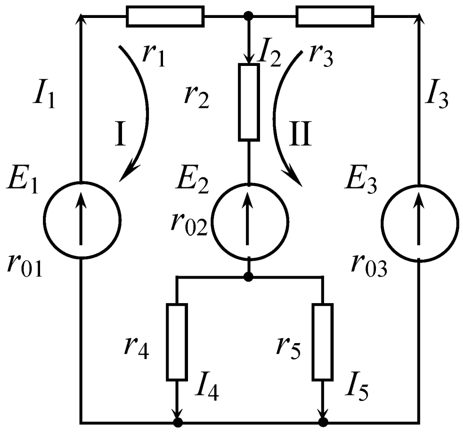


Рис.12. Схема цепи постоянного тока

Дано: $E_1 = 0$; $E_2 = 24$ В; $E_3 = 36$ В; $r_{01} = 0$; $r_{02} = 0{,}5$ Ом; $r_{03} = 0{,}5$ Ом; $r_1 = 6$ Ом; $r_2 = 1{,}5$ Ом; $r_3 = 9{,}5$ Ом; $r_4 = 12$ Ом; $r_5 = 12$ Ом, где r_{01}, r_{02}, r_{03} – внутренние сопротивления источников ЭДС.

Решение. Упростим схему, заменив сопротивления r_4 и r_5 эквивалентным сопротивлением $r_{4,5} = r_4 \cdot r_5/(r_4 + r_5) = 12 \cdot 12/(12 + 12) = 6$ Ом.

Тогда схема принимает вид

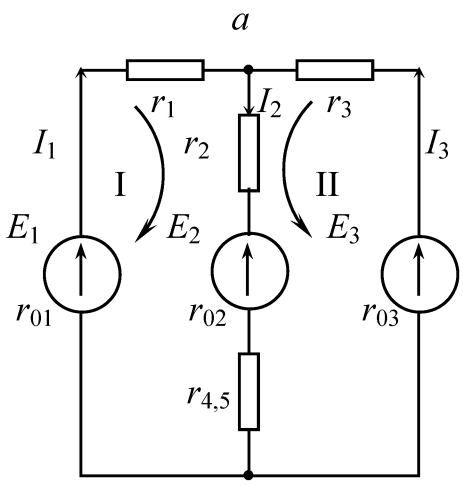


Рис. 13. Упрощённая схема цепи постоянного тока

По первому и второму законам Кирхгофа для этой схемы можно написать систему линейных уравнений (для узла «a» и для контуров I и II):

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0;$$
$$I_1(r_{01} + r_1) + I_2(r_{02} + r_2 + r_{4,5}) = E_1 - E_2;$$
$$I_3(r_{03} + r_3) + I_2(r_{02} + r_2 + r_{4,5}) = E_3 - E_2.$$

В результате решения этой системы находим все неизвестные токи в ветвях: $I_1 = -2{,}809$ А, $I_2 = -0{,}894$ А, $I_3 = 1{,}915$ А.

Так как $r_4 = r_5$, то $I_4 = I_5$ и по первому закону Кирхгофа $I_2 = I_4 + I_5 \rightarrow I_4 = I_5 =$ $= I_2/2 = -0{,}447$ А.

Уравнение баланса мощностей:

$$E_1{\cdot}I_1 + E_2{\cdot}I_2 + E_3{\cdot}I_3 = r_1{\cdot}I_1^2 + r_2{\cdot}I_2^2 + r_3{\cdot}I_3^2 + r_4{\cdot}I_4^2 + r_5{\cdot}I_5^2 + r_{01}{\cdot}I_1^2 + r_{02}{\cdot}I_2^2 + r_{03}{\cdot}I_3^2;$$
$$90{,}396\ \text{В} = 90{,}396\ \text{В}.$$

Решение примера П.1.4 матричным методом.

$E_1 := 0 \quad E_2 := 24 \quad E_3 := 36 \quad r_{01} := 0 \quad r_{02} := 0.5 \quad r_{03} := r_{02} \quad r_1 := 6$

$r_2 := 1.5 \quad r_3 := 9.5 \quad r_4 := 12 \quad r_5 := r_4$

$r_{45} := \dfrac{r_4 \cdot r_5}{r_4 + r_5} \qquad r_{45} = 6$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ r_{01} + r_1 & r_{02} + r_2 + r_{45} & 0 \\ 0 & r_{02} + r_2 + r_{45} & r_{03} + r_3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ E_1 - E_2 \\ E_3 - E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.809 \\ -0.894 \\ 1.915 \end{pmatrix}$$

$I_1 := -2.809 \quad I_2 := -0.894 \quad I_3 := 1.915 \quad I_1 \cdot E_1 + \left|I_2 \cdot E_2\right| + I_3 \cdot E_3 = 90.396$

$I_1^{\,2} \cdot \left(r_{01} + r_1\right) + I_2^{\,2} \cdot \left(r_{02} + r_2 + r_{45}\right) + I_3^{\,2} \cdot \left(r_{03} + r_3\right) = 90.409$.

Приложение 2. Расчёт электрических цепей переменного тока

Широкое применение в электрических цепях электро-, радио- и других установок находят периодические ЭДС, напряжения и токи, которые изменяются во времени по значению и направлению, причём эти изменения повторяются через некоторые равные промежутки времени T, называемые *периодом*.

На практике все источники энергии переменного тока (генераторы электростанций) создают ЭДС, изменяющуюся по *синусоидальному закону*.

Любая периодическая величина имеет ряд характерных значений. *Максимальное значение* или *амплитуду* ЭДС, напряжения и тока обозначают соответственно E_m, U_m, I_m. Значение периодически изменяющейся величины в рассматриваемый момент времени называют *мгновенным* её значением и обозначают e, u, i – ЭДС, напряжение и ток соответственно. Максимальное значение – частный случай мгновенного значения.

Величина, обратная периоду, то есть число полных изменений периодической величины за одну секунду, называется *частотой* $f = 1/T$. Частоту выражают в герцах (Гц). В качестве стандартной промышленной частоты принята $f = 50$ Гц.

Электрические цепи, в которых действуют синусоидальные ЭДС и токи, называются электрическими цепями синусоидального тока. Для количественной оценки синусоидального тока $i = I_m \sin \omega t$ (где $\omega = 2\pi f$ – угловая частота изменения синусоидального тока), который в течение времени непрерывно изменяется, используют значение постоянного тока, эквивалентное значению синусоидального тока по совершаемой работе. Такое значение называют *действующим* и обозначают $I = I_m/\sqrt{2} = 0{,}707 I_m$. Аналогично, действующие значения ЭДС и напряжений равны соответственно $E = E_m/\sqrt{2} = 0{,}707 E_m$, $U = U_m/\sqrt{2} = 0{,}707 U_m$.

Под *средним* значением синусоидальной величины понимают её среднеарифметическое значение. Если определять среднее значение синусоидальных величин за период, то оно будет равно нулю, так как положительная и отрицательная полуволны синусоидальных кривых совпадают по форме. Поэтому среднее значение синусоидального тока, ЭДС и напряжения определяют за полпериода $I_{ср} = 2I_m/\pi = 0{,}637 I_m$, $E_{ср} = 2E_m/\pi = 0{,}637 E_m$, $U_{ср} = 2U_m/\pi = 0{,}637 U_m$.

Отношение действующего значения к среднему называется *коэффициентом формы периодической кривой*. Для синусоидальной кривой коэффициент формы $k_ф = I/I_{ср} = I_m \pi/(2\sqrt{2} I_m) = 1{,}11$. Для периодической кривой, имеющей прямоугольную форму, $I = I_{ср} = I_m$ и $k_ф = 1$.

Синусоидальные ЭДС, напряжения и токи могут быть записаны в виде уравнений:

$$e = E_m \sin \omega t;$$
$$u = U_m \sin \omega t;$$
$$i = I_m \sin \omega t.$$

В общем случае аргумент синусоидальной функции, называемый *фазовым углом* или просто *фазой*, равный $\omega t + \psi$ или $\omega t - \psi$, может отличаться от нуля при $t = 0$. Тогда мгновенные значения можно записать так:

$$e = E_m \sin(\omega t \pm \psi_e);$$
$$u = U_m \sin(\omega t \pm \psi_u);$$
$$i = I_m \sin(\omega t \pm \psi_i).$$

Значение фазового угла при $t = 0$ называется *начальной фазой* (ψ_e, ψ_u, ψ_i). Графическое изображение синусоидальной ЭДС показано на рис. 14.

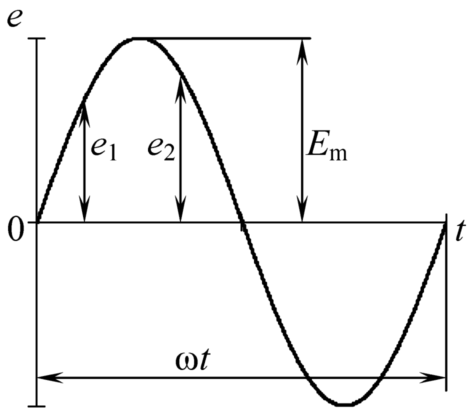


Рис. 14. Графическое изображение синусоидальной ЭДС

Аналогично этому изображают напряжение и ток, когда начальные фазы равны нулю (рис. 15). В этом случае синусоидальные величины одновременно проходят через нулевые значения. О таких величинах говорят, что они *совпадают по фазе*. Синусоидальные величины будут также совпадать по фазе, если их начальные фазы равны нулю.

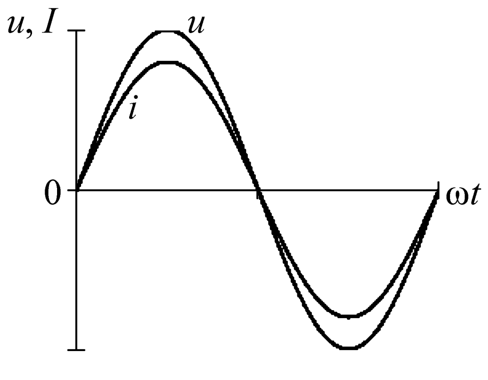


Рис. 15. Синусоидальные напряжения и ток при $\psi_u = \psi_i = 0$

Если две синусоидальные величины одновременно проходят через нулевые значения и одновременно принимают максимальные значения противоположных знаков, то такие величины *находятся в противофазе* или *сдвинуты по фазе* на угол π (рис. 16).

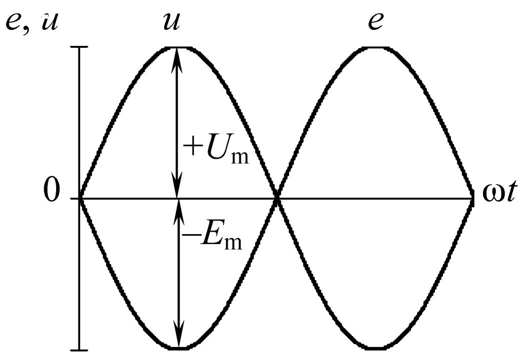


Рис. 16. Синусоидальные напряжения и ЭДС при $\psi_u = 0$ и $\psi_e = \pi$

На практике чаще всего имеют место случаи, когда ЭДС, напряжения и токи не совпадают по фазе, то есть через нулевые значения проходят не одновременно (рис. 17). Если мгновенные значения ЭДС $e_1 = E_{1m}\sin(\omega t + \psi_{e1})$ и $e_2 = E_{2m}\sin(\omega t + \psi_{e2})$, то при $\psi_{e2} > \psi_{e1}$ ЭДС e_2 *опережает по фазе* ЭДС e_1 или ЭДС e_1 *отстаёт по фазе* от ЭДС e_2. Разность фазовых углов $\psi_e = \psi_{e2} - \psi_{e1}$ называется *разностью* или *сдвигом фаз*.

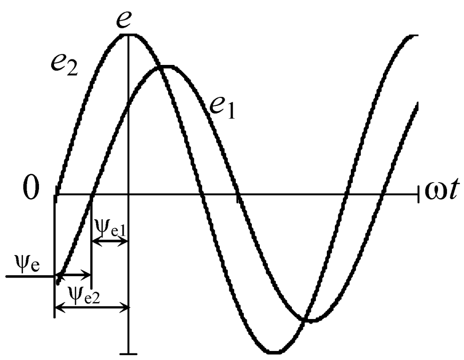


Рис. 17. Синусоидальные ЭДС при $\psi_{e2} > \psi_{e1}$

С помощью графического изображения в прямоугольных координатах можно находить опережающую и отстающую синусоидальные величины. При этом пользуются таким правилом. Отстаёт по фазе та из двух синусоидальных величин, которая при переходе от отрицательных значений к положительным позже (правее) пересекает ось абсцисс. На рис. 17 ЭДС e_1 отстаёт по фазе от ЭДС e_2. Фазовый угол, определяемый отрезком оси абсцисс, заключённым между точками пересечения её синусоидальными кривыми является углом сдвига по фазе (угол ψ_e).

Таким образом, можно сделать вывод: *если синусоидальная величина при переходе от отрицательных значений к положительным пересекает ось абсцисс левее оси ординат, то она имеет положительную начальную фазу, а если правее – то отрицательную*. Мгновенные значения ЭДС, изображённых на рис. 17, будут равны: $e_1 = E_{1m}\sin(\omega t + \psi_{e1})$ и $e_2 = E_{2m}\sin(\omega t - \psi_{e2})$.

Особое значение имеет угол сдвига по фазе $\varphi = \psi_u - \psi_i$ между напряжением и током, ψ_u и ψ_i – начальные фазы напряжения и тока.

Если начальную фазу тока выразить через начальную фазу напряжения $\psi_i = \psi_u - \varphi$, то напряжение и ток будут определяться по формулам:

$$u = U_m \sin(\omega t + \psi_u);\ i = I_m \sin(\omega t + \psi_u - \varphi).$$

Если $\psi_u = 0$, то

$$u = U_m \sin \omega t;\ i = I_m \sin(\omega t - \varphi).$$

Эти уравнения показывают, что если угол φ положительный, то ток отстаёт по фазе от напряжения на этот угол (рис. 18), и наоборот.

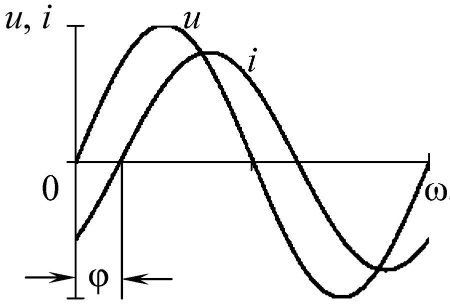


Рис. 18. Синусоидальные напряжения и ток при $\varphi > 0$

Пример П.2.1. Исходными для расчёта являются схема электрической цепи, приведённая на рис. 19: а) комплексные сопротивления в её ветвях $Z_1 = 2 - 4j$ Ом, $Z_2 = 3$ Ом, $Z_3 = -2j$ Ом, $Z_4 = 10$ Ом, $Z_5 = 10 + 10j$ Ом; б) напряжение на входе цепи $U = 120$ В и ток в ветви цепи $I_3 = 5$ А.

Изобразить схему цепи с указанием на ней элементов: резисторов, катушек индуктивности и конденсаторов.

Рассчитать комплексные и мгновенные токи и напряжения ветвей. Изобразить на комплексной плоскости токи в ветвях и напряжения на них и, складывая соответствующие комплексным числам векторы, проверить выполнение уравнений первого и второго законов Кирхгофа: $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3$, $\dot{I}_3 = \dot{I}_4 + \dot{I}_5$, $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2$, $\dot{U}_2 = \dot{U}_3 + \dot{U}_4$, $\dot{U}_4 = \dot{U}_5$ для узлов и контуров цепи. Найти угол φ сдвига по фазе между напряжением на входе цепи и током i_1. Определить характер цепи (индуктивный или ёмкостный). Рассчитать активную и реактивную мощности.

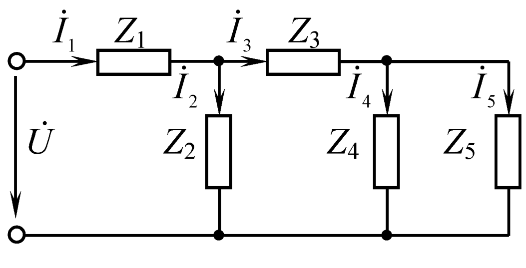


Рис. 19. Расчётная схема электрической цепи

<u>Решение</u>

Схема цепи с указанием на ней элементов изображена на рис. 20.

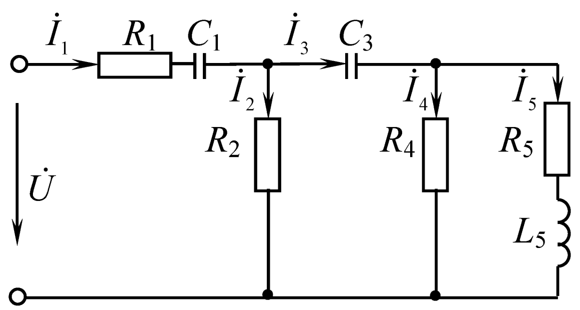


Рис. 20. Схема электрической цепи с элементами

Упростим схему, заменив элементы схемы на эквивалентные, (вариант «а»). $Z_{45} = Z_4 \cdot Z_5/(Z_4 + Z_5) = 10\cdot(10 + 10j)/(10 + 10 + 10j) = (100 + 100j)/(20 + 10j) = 6 + 2j$ Ом; $Z_{345} = Z_3 + Z_{45} = -2j + 6 + 2j = 6$ Ом; $Z_{2345} = Z_2 \cdot Z_{345}/(Z_2 + Z_{345}) = 3\cdot 6/(3 + 6) = 2$ Ом; $Z_{12345} = Z_1 + Z_{2345} = 2 - 4j + 2 = 4 - 4j$ Ом.

Определяем комплексные токи и напряжения ветвей.

$\dot I_1 = \dfrac{\dot U}{Z_{12345}} = \dfrac{120}{4-4j} = 15 + j15$ А, $\dot U_1 = \dot I_1 \cdot Z_1 = (15 + 15j)\cdot(2 - 4j) = 90 - 30j$ В, $\dot U_{2345} = \dot I_1 \cdot Z_{2345} = (15 + 15j)\cdot 2 = 30 + 30j$ В, $\dot I_2 = \dfrac{\dot U_{2345}}{Z_2} = \dfrac{30+30j}{3} = 10 + 10j$ А, $\dot I_3 = \dfrac{\dot U_{2345}}{Z_{345}} = \dfrac{30+30j}{6} = 5 + 5j$ А, $\dot U_3 = \dot I_3 \cdot Z_3 = (5 + 5j)\cdot(-2j) = 10 - 10j$ В, $\dot U_{45} = \dot I_3 \cdot Z_{45} = (5 + 5j)\cdot(6 + 2j) = 20 + 40j$ В, $\dot I_4 = \dfrac{\dot U_{45}}{Z_4} = \dfrac{20+40j}{10} = 2 + 4j$ А, $\dot I_5 = \dfrac{\dot U_{45}}{Z_5} = \dfrac{20+40j}{10+10j} = 3 + j$ А, $\dot U_4 = \dot I_4 \cdot Z_4 = (2 + 4j)\cdot 10 = 20 + 40j$ В, $\dot U_5 = \dot I_5 \cdot Z_5 = (3 + j)\cdot(10 + 10j) = 20 + 40j$ В.

Амплитудные значения токов и напряжений определяем по формуле:

$$I_m = \sqrt{2}\cdot\sqrt{(\mathrm{Re}\,\dot I)^2 + (\mathrm{Im}\,\dot I)^2},\ U_m = \sqrt{2}\cdot\sqrt{(\mathrm{Re}\,\dot U)^2 + (\mathrm{Im}\,\dot U)^2}.$$

$I_{m1} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{15^2 + 15^2} = 30$ А; $I_{m2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{10^2 + 10^2} = 20$ А; $I_{m3} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{5^2 + 5^2} = 10$ А; $I_{m4} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2^2 + 4^2} = 6{,}325$ А; $I_{m5} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{3^2 + 1^2} = 4{,}472$ А, $U_{m1} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{90^2 + 30^2} = 134{,}164$ В; $U_{m2} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{30^2 + 30^2} = 60$ В; $U_{m3} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{10^2 + 10^2} = 20$ В; $U_{m4} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{20^2 + 40^2} = 63{,}246$ В, $U_{m4} = \sqrt{2}\cdot 120 = 169{,}706$ В.

Начальные фазы токов рассчитываем по формулам:

$$\Psi_i = \mathrm{arctg}[\mathrm{Im}(\dot I)/\mathrm{Re}(\dot I)] \text{ при } \mathrm{Re}(\dot I) > 0,\ \mathrm{Im}(\dot I) > 0;$$
$$\Psi_i = \pi + \mathrm{arctg}[\mathrm{Im}(\dot I)/\mathrm{Re}(\dot I)] \text{ при } \mathrm{Re}(\dot I) < 0,\ \mathrm{Im}(\dot I) > 0;$$
$$\Psi_i = -\pi - \mathrm{arctg}[\mathrm{Im}(\dot I)/\mathrm{Re}(\dot I)] \text{ при } \mathrm{Re}(\dot I) < 0,\ \mathrm{Im}(\dot I) < 0.$$

$\Psi_{i1} = \mathrm{arctg}(15/15) = 0{,}785$ радиан $= 45°$,
$\Psi_{i2} = \mathrm{arctg}(10/10) = 0{,}785$ радиан $= 45°$,
$\Psi_{i3} = \mathrm{arctg}(5/5) = 0{,}785$ радиан $= 45°$,
$\Psi_{i4} = \mathrm{arctg}(4/2) = 1{,}107$ радиан $= 63{,}4°$,

Ψ_{i5} = arctg(1/3) = 0,322 радиан = 18,4°,
Ψ_{u1} = arctg(–30/90) = –0,322 радиан = –18,4°,
Ψ_{u2} = arctg(30/30) = 0,785 радиан = 45°,
Ψ_{u3} = arctg(–10/10) = –0,785 радиан = –45°,
Ψ_{u4} = arctg(40/20) = 1,107 радиан = 63,4°.

Комплексная мощность в цепи $S = \dot{U}\dot{I}^* = 120\cdot(15 - 15j) = 1800 - 1800j$ В·А, так что активная мощность P = 1800 Вт и реактивная мощность Q = –1800 вар.

Начальная фаза напряжения на входе цепи равна нулю, начальная фаза тока i_1 равна 45°, поэтому угол сдвига по фазе между напряжением на входе цепи и током i_1 получается равным 0° – 45° = –45°. Таким образом, цепь имеет ёмкостный характер и реактивная мощность Q отрицательна.

Запишем мгновенные токи и напряжения:
$i_1 = 30\sin(\omega t + 45°)$ А,
$i_2 = 20\sin(\omega t + 45°)$ А,
$i_3 = 10\sin(\omega t + 45°)$ А,
$i_4 = 6{,}325\sin(\omega t + 63{,}4°)$ А,
$i_5 = 4{,}472\sin(\omega t + 18{,}4°)$ А,
$u_1 = 134{,}164\sin(\omega t - 18{,}4°)$ В,
$u_2 = 60\sin(\omega t + 45°)$ В,
$u_3 = 20\sin(\omega t - 45°)$ В,
$u_4 = 63{,}246\sin(\omega t + 63{,}4°)$ В, $u_5 = 63{,}246\sin(\omega t + 63{,}4°)$ В.

На рис. 21 изображены векторы токов и напряжений, соответствующие их найденным комплексным значениям.

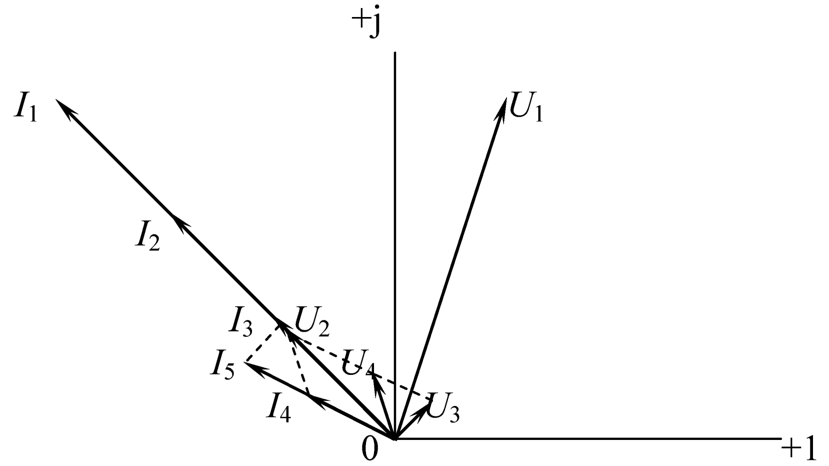


Рис. 21. Векторная диаграмма токов и напряжений

Рассчитаем искомые величины по варианту «б», когда задан действующий ток I_3 = 5 А согласно рис. 20.

Принимаем начальную фазу тока i_3, равной нулю, тогда получаем:

$\dot{U}_3 = \dot{I}_3 \cdot Z_3 = 5\cdot(-2j) = -10j$ В, $\dot{U}_4 = \dot{I}_3 \cdot Z_{45} = 5\cdot(6 + 2j) = 30 + 10j$ В, $\dot{I}_4 = \dfrac{\dot{U}_4}{Z_4} =$ $(30 + 10j)/10 = 3 + j$ А, $\dot{I}_5 = \dfrac{\dot{U}_4}{Z_5} = (30 + 10j)/(10 + 10j) = 2 - j$ А, $\dot{U}_2 = \dot{U}_3 + \dot{U}_4 =$

$-10j + 30 + 10j = 30$ В, $\dot{I}_2 = \dfrac{\dot{U}_2}{Z_2} = 30/3 = 10$ А, $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 10 + 5 = 15$ А, $\dot{U}_1 = \dot{I}_1 \cdot Z_1 = 15\cdot(2 - 4j) = 30 - 60j$ В, $\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2 = 30 - 60j + 30 = 60 - 60j$ В.

Комплексная мощность в цепи $S = \dot{U}\dot{I}^* = (60 - 60j)\cdot 15 = 900 - 900j$ В·А, так что активная мощность $P = 900$ Вт и реактивная $Q = -900$ вар.

Запишим мгновенные токи и напряжения:
$i_1 = 21{,}213\sin \omega t$ А,
$i_2 = 14{,}142\sin \omega t$ А,
$i_3 = 7{,}071\sin \omega t$ А,
$i_4 = 4{,}472\sin (\omega t + 18{,}4^\circ)$ А,
$i_5 = 3{,}162\sin (\omega t - 26{,}6^\circ)$ А,
$u_1 = 94{,}868\sin (\omega t - 63{,}4^\circ)$ В,
$u_2 = 42{,}426\sin \omega t$ В,
$u_3 = 14{,}142\sin (\omega t - 90^\circ)$ В,
$u_4 = 44{,}721\sin (\omega t + 18{,}4^\circ)$ В,
$u_5 = 44{,}721\sin (\omega t + 18{,}4^\circ)$ В, $u = 120\sin (\omega t - 45^\circ)$ В.

Начальная фаза напряжения на входе цепи составляет – 45°, начальная фаза тока i_1 равна нулю, поэтому угол сдвига по фазе между напряжением на входе цепи и током i_1 получается равным – 45° – 0° = –45°. Таким образом, цепь имеет ёмкостный характер и реактивная мощность Q отрицательна.

На рис. 22 изображены векторы токов и напряжений, соответствующие их найденным комплексным значениям.

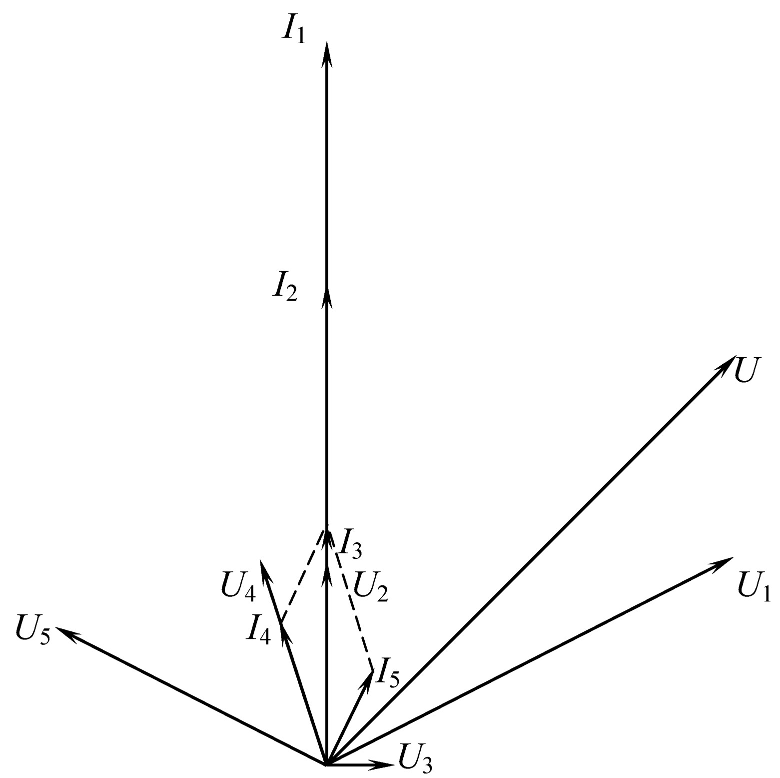


Рис. 22. Векторная диаграмма токов и напряжений

Выполняем расчёт с помощью пакета программ MathCAD.

Рассчитываем цепь при заданном входном напряжении U = 120 В.

$Z_1 := 2 - 4j \quad Z_2 := 3 \quad Z_3 := -2j \quad Z_4 := 10 \quad Z_5 := 10 + 10j \qquad U := 120$

$$Z_{45} := \frac{Z_4 \cdot Z_5}{Z_4 + Z_5} \qquad Z_{45} = 6 + 2i \qquad Z_{345} := Z_3 + Z_{45} \qquad Z_{345} = 6$$

$$Z_{2345} := \frac{Z_2 \cdot Z_{345}}{Z_2 + Z_{345}} \qquad Z_{2345} = 2 \qquad Z_{12345} := Z_1 + Z_{2345} \qquad Z_{12345} = 4 - 4i$$

$$I_1 := \frac{U}{Z_{12345}} \qquad I_1 = 15 + 15i \qquad U_1 := I_1 \cdot Z_1 \qquad U_1 = 90 - 30i$$

$$U_{2345} := I_1 \cdot Z_{2345} \qquad U_{2345} = 30 + 30i \qquad I_2 := \frac{U_{2345}}{Z_2} \qquad I_2 = 10 + 10i$$

$$I_3 := \frac{U_{2345}}{Z_{345}} \qquad I_3 = 5 + 5i \qquad U_3 := I_3 \cdot Z_3 \qquad U_3 = 10 - 10i \qquad U_{45} := I_3 \cdot Z_{45}$$

$$I_4 := \frac{U_{45}}{Z_4} \qquad I_4 = 2 + 4i \qquad I_5 := \frac{U_{45}}{Z_5} \qquad I_5 = 3 + i$$

$$I_2 + I_3 = 15 + 15i \qquad I_4 + I_5 = 5 + 5i \qquad U_1 + I_2 \cdot Z_2 = 120 \qquad I_2 \cdot Z_2 = 30 + 30i$$

$$I_3 \cdot Z_3 + I_4 \cdot Z_4 = 30 + 30i \qquad I_4 \cdot Z_4 = 20 + 40i \qquad I_5 \cdot Z_5 = 20 + 40i$$

$$\phi := \arg(U) - \arg(I_1) \qquad \phi = -0.785\,\mathrm{rad} \qquad \phi = -45\,\mathrm{deg}$$

$$P := U \cdot |I_1| \cdot 0.707 \qquad P = 1.8 \times 10^3 \qquad Q := U \cdot |I_1| \cdot \sin(\phi) \qquad Q = -1.8 \times 10^3$$

Рассчитаем искомые величины по варианту «б», когда задан действующий ток I_3 = 5 А согласно рис. 20.

Для расчёта переопределим значения переменных, принятых ранее. Комплексную мощность $\dot{S}$ в цепи находим как произведение напряжения $\dot{U}$ на входе цепи на комплексное сопряжённое значение тока $\dot{I}_1^*$. Тогда активную составляющую комплексной мощности находим как Re($\dot{S}$), а реактивную как Im($\dot{S}$).

Принимаем начальную фазу тока i_3 равной $\psi_{i3} = 0$, тогда получаем:

$I_3 := 5 \quad U_3 := I_3 \cdot Z_3 \quad U_3 = -10i \quad U_4 := I_3 \cdot Z_{45} \quad U_4 = 30 + 10i$

$I_4 := \dfrac{U_4}{Z_4} \quad I_4 = 3 + i \quad I_5 := \dfrac{U_4}{Z_5} \quad I_5 = 2 - i \quad U_2 := U_3 + U_4$

$U_2 = 30 \quad I_2 := \dfrac{U_2}{Z_2} \quad I_2 = 10 \quad I_1 := I_2 + I_3 \quad I_1 = 15$

$U_1 := I_1 \cdot Z_1 \quad U_1 = 30 - 60i \quad U := U_1 + U_2 \quad U = 60 - 60i \quad \overline{I_1} = 15$

$S := U \cdot \overline{I_1} \quad S = 900 - 900i \quad U_5 := I_5 \cdot Z_5 \quad U_5 = 30 + 10i$

$I_{m1} := \sqrt{2} \cdot |I_1| \quad I_{m1} = 21.213 \quad \arg(I_1) = 0$

$I_{m2} := \sqrt{2} \cdot |I_2| \quad I_{m2} = 14.142 \quad \arg(I_2) = 0$

$I_{m3} := \sqrt{2} \cdot |I_3| \quad I_{m3} = 7.071 \quad \arg(I_3) = 0$

$I_{m4} := \sqrt{2} \cdot |I_4| \quad I_{m4} = 4.472 \quad \arg(I_4) = 0.322\,\text{rad} \quad \arg(I_4) = 18.435\,\text{deg}$

$I_{m5} := \sqrt{2} \cdot |I_5| \quad I_{m5} = 3.162 \quad \arg(I_5) = -0.464\,\text{rad} \quad \arg(I_5) = -26.565\,\text{deg}$

$U_m := \sqrt{2} \cdot |U| \quad U_m = 120 \quad \arg(U) = -0.785\,\text{rad} \quad \arg(U) = -45\,\text{deg}$

$U_{m1} := \sqrt{2} \cdot |U_1| \quad U_{m1} = 94.868 \quad \arg(U_1) = -1.107\,\text{rad} \quad \arg(U_1) = -63.435\,\text{deg}$

$U_{m2} := \sqrt{2} \cdot |U_2| \quad U_{m2} = 42.426 \quad \arg(U_2) = 0$

$U_{m3} := \sqrt{2} \cdot |U_3| \quad U_{m3} = 14.142 \quad \arg(U_3) = -1.571\,\text{rad} \quad \arg(U_3) = -90\,\text{deg}$

$U_{m4} := \sqrt{2} \cdot |U_4| \quad U_{m4} = 44.721 \quad \arg(U_4) = 0.322\,\text{rad} \quad \arg(U_4) = 18.435\,\text{deg}$

$U_{m5} := \sqrt{2} \cdot |U_5| \quad U_{m5} = 44.721 \quad \arg(U_5) = 0.322\,\text{rad} \quad \arg(U_5) = 18.435\,\text{deg}$

$\phi := \arg(U) + \arg(I_1) \quad \phi = -0.785\,\text{rad} \quad \phi = -45\,\text{deg}$.

Приложение 3. Расчёт сложных электрических цепей

Пример П.3.1. Рассчитать токи в ветвях электрической цепи, схема которой приведена на рис. 23, методом контурных токов.

<u>Решение</u>

Выбираем условные положительные направления токов в контурах и направления контурных токов, как указано на рис. 23. Исходные данные для расчёта: $Z_1 = 4j$ Ом, $Z_2 = 2$ Ом, $Z_3 = 2$ Ом, $Z_4 = -2j$ Ом, $Z_5 = -2j$ Ом, $Z_6 = 2$ Ом, $Z_7 = -j$ Ом, $\dot{E}_1 = 12 - 6j$ В, $\dot{E}_2 = 6$ В.

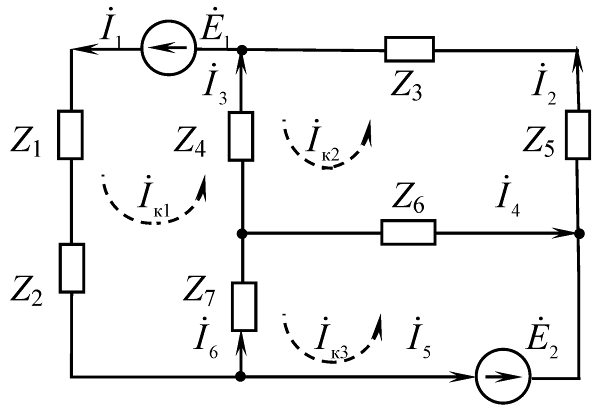


Рис. 23. Расчётная схема электрической цепи

Составляем систему уравнений для трёх независимых контуров:

$(Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_7)\dot{I}_{к1} - Z_4\dot{I}_{к2} - Z_7\dot{I}_{к3} = \dot{E}_1$;

$-Z_4\dot{I}_{к1} + (Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6)\,\dot{I}_{к2} - Z_6\dot{I}_{к3} = 0$;

$-Z_7\dot{I}_{к1} - Z_6\dot{I}_{к2} + (Z_6 + Z_7)\,\dot{I}_{к3} = \dot{E}_2$.

Решаем систему трёх линейных уравнений относительно контурных токов матричным методом.

$$\begin{pmatrix} Z_1+Z_2+Z_4+Z_7 & -Z_4 & -Z_7 \\ -Z_4 & Z_3+Z_4+Z_5+Z_6 & -Z_6 \\ -Z_7 & -Z_6 & Z_6+Z_7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \dot{E}_1 \\ 0 \\ \dot{E}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5-4{,}5j \\ -1{,}5j \\ 1{,}5-1{,}5j \end{pmatrix}.$$

Контурные токи равны: $\dot{I}_{к1} = 1{,}5 - 4{,}5j$ А, $\dot{I}_{к2} = -1{,}5j$ А, $\dot{I}_{к3} = 1{,}5 - 1{,}5j$ А.

Тогда токи в ветвях будут равны: $\dot{I}_1 = \dot{I}_{к1} = 1{,}5 - 4{,}5j$ А, $\dot{I}_2 = \dot{I}_{к2} = -1{,}5j$ А, $\dot{I}_3 = \dot{I}_{к1} - \dot{I}_{к2} = 1{,}5 - 3j$ А, $\dot{I}_4 = \dot{I}_{к2} - \dot{I}_{к3} = -1{,}5$ А, $\dot{I}_5 = \dot{I}_{к3} = 1{,}5 - 1{,}5j$ А, $\dot{I}_6 = \dot{I}_{к1} - \dot{I}_{к3} = -3j$ А.

Проверка: $\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3 = 1{,}5 - 4{,}5j$ А, $\dot{I}_6 = \dot{I}_3 + \dot{I}_4 = -3j$ А, $\dot{I}_2 = \dot{I}_4 + \dot{I}_5 = -1{,}5j$ А, $\dot{I}_1 = \dot{I}_5 + \dot{I}_6 = 1{,}5 - 4{,}5j$ А.

Решаем этот пример с помощью пакета программ MathCAD.

Задаём исходные данные для расчёта.

$Z_1 := 4j \quad Z_2 := 2 \quad Z_3 := Z_2 \quad Z_4 := -2j \quad Z_5 := Z_4 \quad Z_6 := Z_2 \quad Z_7 := -j$

$E_1 := 12 - 6j \quad E_2 := 6$

Решаем полученную систему линейных уравнений. Для этого составляем квадратную матрицу, элементами которой являются коэффициенты при неизвестных контурных токах $\dot{I}_{к1}$, $\dot{I}_{к2}$ и $\dot{I}_{к3}$. Находим матрицу обратную полученной и умножаем её на матрицу-столбец, элементами которой являются значения правых частей уравнений системы. В результате получаем матрицу-столбец, элементами которой являются значения контурных токов.

$$\begin{pmatrix} Z_1 + Z_2 + Z_4 + Z_7 & -Z_4 & -Z_7 \\ -Z_4 & Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6 & -Z_6 \\ -Z_7 & -Z_6 & Z_6 + Z_7 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} E_1 \\ 0 \\ E_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 - 4.5i \\ -1.5i \\ 1.5 - 1.5i \end{pmatrix}$$

$I_{к1} := 1.5 - 4.5i \quad I_{к2} := -1.5i \quad I_{к3} := 1.5 - 1.5i$

По найденным значениям контурных токов находим токи в ветвях схемы.

$I_1 := I_{к1} \quad I_1 = 1.5 - 4.5i \quad I_2 := I_{к2} \quad I_2 = -1.5i$

$I_3 := I_{к1} - I_{к2} \quad I_3 = 1.5 - 3i \quad I_4 := I_{к2} - I_{к3} \quad I_4 = -1.5$

$I_5 := I_{к3} \quad I_5 = 1.5 - 1.5i \quad I_6 := I_{к1} - I_{к3} \quad I_6 = -3i$

Делаем проверку.

$I_2 + I_3 = 1.5 - 4.5i \quad I_3 + I_4 = -3i$

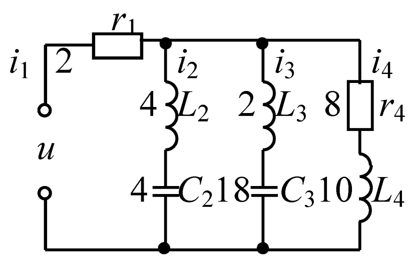
$I_4 + I_5 = -1.5i \quad I_5 + I_6 = 1.5 - 4.5i$

Как показывает проверка, пример решён верно.

Приложение 4. Расчёт электрических цепей при периодических несинусоидальных ЭДС, напряжениях и токах

Пример П.4.1. Рассчитать токи во всех ветвях и активную мощность в электрической цепи, схема которой приведена на рис. 24. Найти действующее значение тока и напряжения на входе цепи. Построить зависимость напряжения $u(t)$ и тока $i(t)$ на входе цепи.

Сопротивления элементов цепи для тока частоты ω (первой гармонической) указаны в омах, токи – в амперах, напряжения – в вольтах.



$u = 200 + 200\sin\omega t + 200\sin 3\omega t$

Рис. 24. Схема электрической цепи несинусоидального периодического напряжения

а) Расчёт токов при действии на входе цепи постоянного напряжения $U_0 = 200$ В.

Ветви, в которых имеются конденсаторы, разрываем ($1/\omega C = \infty$), катушки индуктивности замыкаем накоротко ($\omega L = 0$). Получаем: $r_{экв} = r_1 + r_4 = 2 + 8 = 10$ Ом, $I_1 = I_4 = 200/10 = 20$ А, $I_2 = I_3 = 0$.

б) Расчёт токов при действии на входе цепи напряжения частотой ω.

Так как в контуре с элементами L_2, C_2 имеем резонанс, то $Z_{22} = 0$ и $Z_{экв} = 2$ Ом.

Далее получаем: $\dot{I}_{1m} = \dot{U}_m / Z_{экв} = 100$ А, $i_1(t) = 100\cdot\sin\omega t$, $i_2 = i_3 = i_4 = 0$.

в) Расчёт токов при действии на входе цепи напряжения частотой 3ω.

Так как в третьей ветви резонанс, то $Z_{экв} = r_1 = 2$ Ом, $\dot{I}_{1m} = 100$ А, $i_2 = i_3 = i_4 = 0$, $i_1(t) = 100\cdot\sin 3\omega t$.

Таким образом, ток на входе цепи равен: $i_1(t) = 20 + 100\cdot\sin\omega t + 100\cdot\sin 3\omega t$.

Действующие значения на входе цепи напряжения U и тока I_1:

$$U = \sqrt{200^2 + \frac{200^2}{2} + \frac{200^2}{2}} \approx 283 \text{ В}, \quad I_1 = \sqrt{20^2 + \frac{100^2}{2} + \frac{100^2}{2}} \approx 102 \text{ А}.$$

Активная мощность в цепи $P = I_1^2 r = 102^2\cdot 2 = 20{,}8$ кВт.

Зависимости $u(t)$ и $i(t)$ представлены на рис. 25.

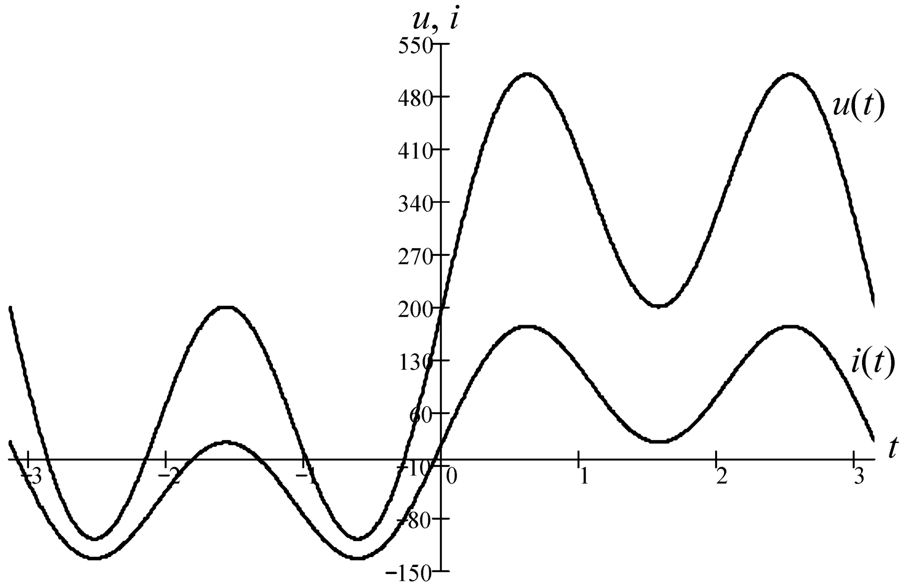


Рис. 25. Зависимости напряжения и тока на входе цепи

Решаем этот пример с помощью пакета программ MathCAD.

$U_0 := 200 \quad r_1 := 2 \quad L_2 := 4j \quad C_2 := -4j \quad L_3 := 2j \quad C_3 := -18j \quad r_4 := 8$

$L_4 := 10j$

$r_{экв} := r_1 + r_4 \quad r_{экв} = 10 \quad I_1 := \dfrac{U_0}{r_{экв}} \quad I_1 = 20 \quad I_4 := I_1 \quad I_4 = 20$

$I_3 := \dfrac{U_0}{\infty} \quad I_3 = 0 \quad I_2 := \dfrac{U_0}{\infty} \quad I_2 = 0$

$Z_{экв} := r_1 \quad U_m := U_0 \quad U_{1m} := \dfrac{U_m}{Z_{экв}} \quad U_{1m} = 100$

$$U := \sqrt{U_0^{\,2} + \frac{U_0^{\,2}}{Z_{экв}} + \frac{U_0^{\,2}}{Z_{экв}}} \qquad U = 282.843$$

$$I_1 := \sqrt{I_1^{\,2} + \frac{U_{1m}^{\,2}}{Z_{экв}} + \frac{U_{1m}^{\,2}}{Z_{экв}}} \qquad I_1 = 101.98$$

$P := I_1^{\,2} \cdot r_1 \quad P = 2.08 \times 10^4$

Предметный указатель

ОГЛАВЛЕНИЕ

Кучер Валентин Яковлевич

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА

ЭЛЕКТРОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Учебное пособие по применению пакета прикладных программ MathCAD при изучении дисциплины

Редактор Т.В. Шабанова

Сводный темплан 2006 г.
Лицензия ЛР № 020308 от 14.02.97
Санитарно-эпидемиологическое заключение № 78.01.07.953.П.005641.11.03 от 21.11.03 г.

Подписано в печать Формат 60×84 1/16
Б. кн. – журн. П.л. 4,00. Б.л. 2,00. Изд-во СЗТУ
Тираж 100. Заказ

Северо-Западный государственный заочный технический университет
Издательство СЗТУ, член Издательско-полиграфической ассоциации университетов России

191186 Санкт-Петербург, ул. Миллионная д. 5