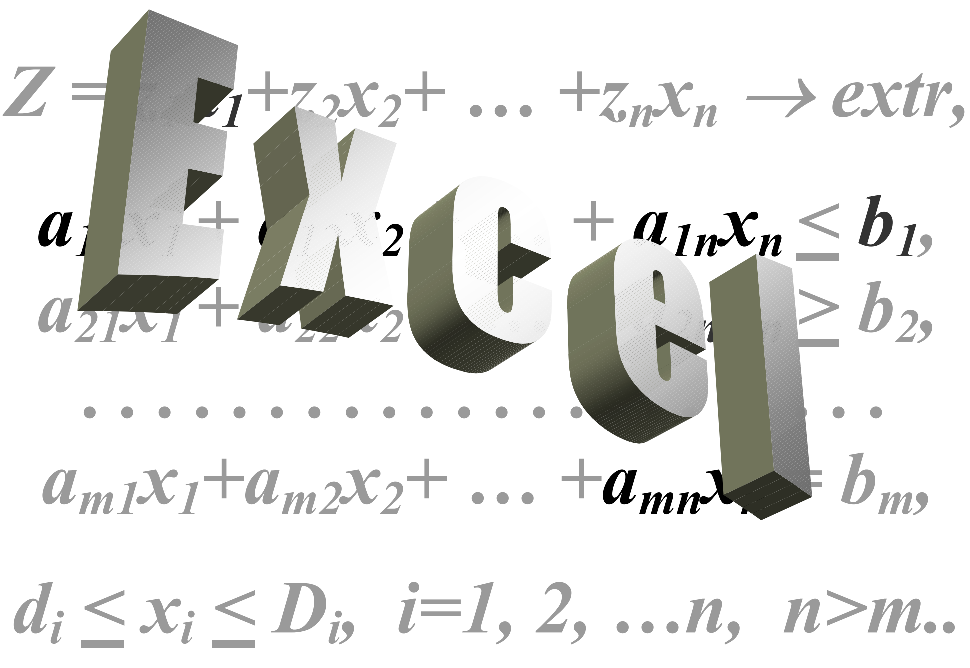
Министерство образования Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Северо-Западный государственный заочный технический университет

В.Н. Костин

Оптимизационные задачи электроэнергетики

Учебное пособие



Санкт-Петербург
2003

Утверждено редакционно-издательским советом университета

УДК 621.314

В. Н. Костин. : Оптимизационные задачи электроэнергетики: Учеб. пособие. - СПб.: СЗТУ, 2003 - 120 с.

Учебное пособие соответствует государственным образовательным стандартам высшего профессионального образования по направлению подготовки дипломированных специалистов 650900 – «Электроэнергетика» (специальность 100400 – Электроснабжение) и направлению подготовки бакалавров 551700 – «Электроэнергетика».

Приведены алгоритмы основных методов математического программирования и других приложений вычислительной математики, применяемых для поиска оптимальных решений. Рассмотрено решение типовых оптимизационных задач в области электроэнергетики. В приложении даны примеры решения оптимизационных задач с помощью программного обеспечения Excel 7.0.

Рецензенты: Г.З. Зайцев, канд. техн. наук, профессор СЗТУ; А.А. Юрганов, доктор техн. наук, профессор ФГУП НИИ ЭЛЕКТРОМАШ; М.И. Божков, канд. тех. наук, директор ООО НПЦ АПЭС.

Предисловие

При проектировании и эксплуатации технических систем постоянно приходится решать задачи поиска наилучшего решения из некоторого множества допустимых решений. Такое решение называют *оптимальным*, процесс поиска такого решения - *оптимизацией*, а задачи, в которых ищется такое решение - *оптимизационными задачами.*

Стремление к оптимальному решению – естественное состояние человека, который должен экономить запасы ресурсов (финансовых, энергетических, сырьевых) и времени. Естественное поведение человека – это, как правило, его действия для получения оптимального результата.

Для решения оптимизационных задач будущему специалисту необходимы знания основ математического моделирования технических систем, методов решения оптимизационных задач, современного программного обеспечения персональных компьютеров.

Формулировка любой технической задачи должна быть переведена на формальный математический язык, т.е. записана с помощью определенных математических выражений. Будущий специалист должен *знать основы математического моделирования и уметь составлять математические модели оптимизационных задач.*

Для конкретной оптимизационной задачи не разрабатывается специальный метод решения. Существуют математические методы, предназначенные для решения любых оптимизационных задач - методы математического программирования. Будущий специалист должен *знать эти методы математического программирования и уметь выбрать целесообразный метод для решения конкретной технической задачи.*

Решение задач небольшой размерности можно выполнить традиционными вычислениями с помощью калькулятора. Решение же реальных задач, размерность которых может быть достаточно большой, возможно лишь с помощью персонального компьютера. Будущий специалист должен *знать программное обеспечение современных персональных компьютеров и уметь пользоваться этим обеспечением.*

Целью и основной задачей дисциплины «Оптимизационные задачи электроэнергетики» являются получение будущими специалистами основ знаний, необходимых для решения оптимизационных задач в области электроэнергетики.

1. Основные понятия и определения

Показатель, по величине которого оценивают, является ли решение оптимальным, называется *критерием оптимальности*. В качестве критерия оптимальности наиболее часто принимается *экономический критерий,* представляющий собой минимум затрат (финансовых, сырьевых, энергетических, трудовых) на реализацию поставленной задачи. При заданной или ограниченной величине указанных затрат экономический критерий выражается в получении максимальной прибыли.

В электроэнергетике в зависимости от требований поставленной задачи могут приниматься и другие критерии оптимальности, в частности:

критерий надежности электроснабжения;

критерий качества электроэнергии;

критерий наименьшего отрицательного воздействия на окружающую среду (экологический критерий).

Решение оптимизационной задачи включает в себя следующие этапы:

1. Сбор исходной информации (исходных данных).
2. Составление математической модели, под которой понимается формализованное математическое описание решаемой задачи.
3. Выбор метода решения, определяемого видом математической модели.
4. Выполнение математических вычислений, поручаемое, как правило, компьютеру.
5. Анализ решения задачи.

Рассмотрим подробнее эти этапы поиска оптимального решения.

1.1. Исходная информация

Очевидно, что без достоверной исходной информации остальные этапы поиска оптимального решения не имеют смысла. Без достоверной информации никакие, даже самые точные вычислительные методы и сверхмощные компьютеры не дадут достоверного оптимального решения. Как говорится, «Что посеешь, то и пожнешь».

При сборе исходной информации необходимо правильно разделить информацию на главную и второстепенную, а также оценить категорию принимаемой исходной информации.

Исходная информация может быть определенной и однозначной. Такая информация и называется *определенной* или *детерминированной*.

Исходная информация может носить случайный характер и подчиняться законам теории вероятностей. Такая информация и называется *случайной*.

Исходная информация может носить неопределенный характер и не подчиняться законам теории вероятностей. Такая информация называется *неопределенной* или *недетерминированной*.

Рассмотрим существующее промышленное предприятие. Мощность, потребляемая предприятием, может быть непосредственно измерена ваттметром. Такая информация будет детерминированной.

Если предприятие проектируется, то мощность, которую будет потреблять предприятие, непосредственно измерить невозможно. О величине этой мощности можно судить лишь с некоторой вероятностью, имея, например, статистические данные об аналогичных объектах. Такая информация будет случайной.

Если аналогичные объекты отсутствуют, о величине мощности, которую будет потреблять предприятие, нельзя судить ни однозначно, ни с какой-то вероятностью. В этом случае информация будет недетерминированной.

1.2. Математическая модель

Формализованное математическое описание оптимизационной задачи, другими словами, математическая модель включает в себя:

целевую функцию;

ограничения;

граничные условия.

Целевая функция представляет собой математическую запись критерия оптимальности. При решении оптимизационной задачи ищется экстремум целевой функции, например минимальные затраты или максимальная прибыль. Обобщенная запись целевой функции имеет следующий вид:

$$Z(x_1, x_2, \dots x_n) \to \text{extr}, \tag{1.1}$$

где $x_1, x_2, \dots x_n$ – искомые переменные, значения которых вычисляются в процессе решения задачи; общее количество переменных равно n.

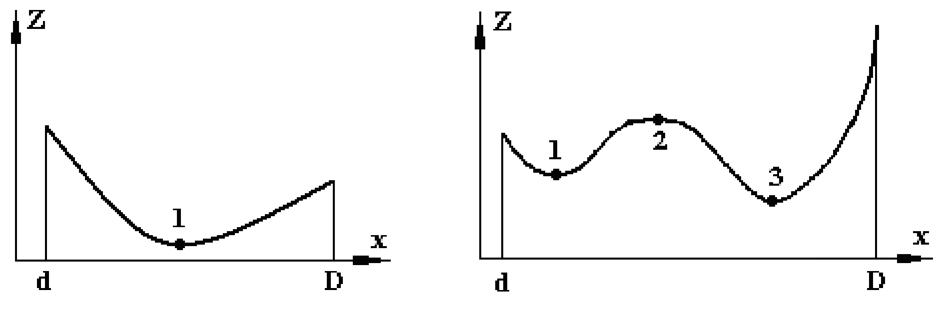
Искомые переменные по своему характеру делятся на непрерывные, дискретные и целочисленные. Если переменная может принимать любые значения, такая переменная называется *непрерывной*. Примером непрерывной переменной может служить мощность, передаваемая по линии электропередачи.

Если переменная может принимать только значения целых чисел, такая переменная называется *целочисленной*. Примером целочисленной переменной может служить количество трансформаторов для электроснабжения объекта или количество изделий, выпускаемых промышленным предприятием.

Если переменная может принимать только определенные значения, такая переменная называется *дискретной*. Примером дискретной переменной может служить искомая мощность трансформатора или искомое сечение линии электропередачи. Значения таких величин регламентируются ГОСТами. Например, мощности трансформаторов составляют ряд … 630, 1000, 1600, … кВ·А, а сечения линии электропередачи – ряд … 50, 70, 95 … мм^2. Распространенной задачей с дискретными переменными является задача выбора варианта из числа заданных.

Зависимость между переменными в целевой функции (1.1) может быть *линейной* или *нелинейной*. Напомним, что линейной называется такая зависимость, в которую переменные x_i (i=1, 2, 3, … n) входят только в первой степени и с этими переменными выполняются только действия сложения, вычитания и умножения на постоянный коэффициент. Во всех других случаях зависимость будет нелинейной.

Нелинейная целевая функция в заданном диапазоне изменения переменных может иметь один экстремум или несколько экстремумов. В первом случае функция будет *одноэкстремальной*, во втором – *многоэкстремальной*. На рис. 1.1 приведены примеры одноэкстремальной (один минимум) и многоэкстремальной (два минимума и один максимум) функции *Z(x)* одной переменной в диапазоне изменения этой переменной $d \le x \le D$.



а) б)

Рис. 1.1. Одноэкстремальная (а) и многоэкстремальная (б) функции

В случае многоэкстремальной функции каждый экстремум называется *локальным*. У многоэкстремальных функций ищется *глобальный* экстремум (наименьший минимум или наибольший максимум). Так при отыскании минимума функции, приведенной на рис. 1.1,б ищется глобальный минимум, отвечающий точке 3.

Ограничения представляют собой различные технические, экономические, экологические условия, учитываемые при решении задачи. Ограничения представляют собой зависимости между переменными $x_1, x_2, \dots x_n$, задаваемые в форме неравенств или равенств

$$
\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \dots x_n) \le b_1;\\
&f_2(x_1, x_2, \dots x_n) = b_2; \qquad (1.2)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f_m(x_1, x_2, \dots x_n) > b_m.
\end{aligned}
$$

Общее количество ограничений равно m. Правые части ограничений, представляющие собой постоянные коэффициенты b_j (j=1, 2, … m), называются свободными членами.

Как и в выражении целевой функции (1.1), зависимости между переменными в системе ограничений (1.2) могут быть линейными и нелинейными.

Наличие в системе ограничений (1.2) соотношений в форме неравенств (неполных равенств) создает дополнительные трудности при решении оптимизационной задачи, поскольку в отличие от строгого равенства неравенства представляют собой в некотором роде неопределенность. Например, в неравенстве

$$2x_1 + 3x_2 x_3 - x_4 < 4,$$

нет определенности на сколько его левая часть меньше 4.

Понятно стремление перейти от ограничений неравенств к равенствам. Для такого перехода используется следующий искусственный прием. Пусть имеем указанное выше неравенство, левая часть которого на неизвестную заранее величину меньше 4. Обозначим эту неизвестную величину как дополнительную неотрицательную переменную x_5 и добавим ее к левой части неравенства. Последнее обращается в строгое равенство

$$2x_1 + 3x_2 x_3 - x_4 + x_5 = 4.$$

Совершенно аналогично неполное равенство типа

$$2x_1 + 3x_2 x_3 - x_4 \le 4$$

обращается в строгое равенство

$$2x_1 + 3x_2 x_3 - x_4 + x_5 = 4.$$

Соотношения типа

$$2x_1 + 3x_2\ x_3 - x_4\ > 4 \quad \text{и} \quad 2x_1 + 3x_2\ x_3 - x_4\ \geq 4$$

после изменения знаков правой и левой частей сводятся к уже рассмотренным случаям.

Таким образом, за счет введения дополнительных переменных все неравенства в системе ограничений (1.2) заменяются строгими равенствами. При этом общее количество n искомых переменных увеличивается.

Предположим, что все m ограничений являются равенствами. При $n = m$ система (1.2) имеет единственное решение. Например, одно уравнение m=1 с одним неизвестным n=1

$$2x_1 = 4$$

имеет единственное решение x_1=2. Поэтому в случае $n = m$ нет места оптимизации.

При $n < m$ система (1.2) не имеет решения и, следовательно, выбирать оптимальное решение не из чего. Например, система из двух уравнений m=2 с одним неизвестным n=1

$$2x_1 = 4,$$
$$3x_1 = 4$$

не имеет решения.

При $n > m$ система (1.2) имеет бесконечное множество решений, из которых можно выбрать оптимальное решение. Например, одно уравнение m=1 с двумя неизвестными n=2

$$x_1 + x_2 = 4$$

имеет бесконечное множество решений: x_1=0, x_2=4; x_1=1, x_2=3; x_1=5, x_2=-1; … Следовательно, поиск оптимального решения возможен лишь в случае, когда $n > m$.

Граничные условия устанавливают диапазон изменения искомых переменных

$$d_i \leq x_i \leq D_i, \quad i=1, 2, \ldots n, \tag{1.3}$$

где d_i и D_i - соответственно нижняя и верхняя границы диапазона изменения переменной x_i.

Наиболее часто в технических задачах все искомые переменные, как правило, неотрицательны. В этом случае граничные условия имеют следующий вид:

$x_i \geq 0$,   где $i = 1, 2, \ldots n$.   (1.3а)

При наличии ограничений и граничных условий ищется уже не абсолютный, а относительный экстремум целевой функции. На рис. 1.2 показана некоторая функция одного переменного *Z(x)*. Указан диапазон изменения переменной *x* (нижняя граница *d* и верхняя граница *D*). Видно, что абсолютный минимум функции соответствует точке 1, а относительный минимум – точке 2, принадлежащей заданному диапазону изменения переменной *x*.

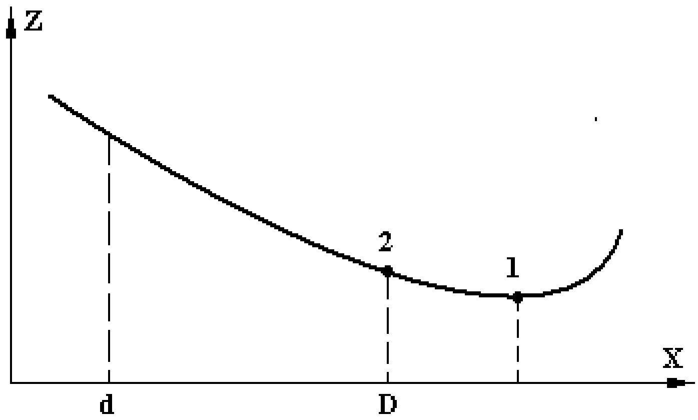


Рис. 1.2. Абсолютный (точка 1) и относительный (точка 2) минимумы функции

1.3. Методы решения оптимизационных задач

Для решения подавляющего большинства оптимизационных задач используются методы *математического программирования*, позволяющие найти экстремальное значение целевой функции (1.1) при соотношениях между переменными, устанавливаемых ограничениями (1.2), в диапазоне изменения переменных, определяемом граничными условиями (1.3).

Математическое программирование представляет собой, как правило, многократно повторяющуюся вычислительную процедуру, приводящую к искомому оптимальному решению.

Выбор метода математического программирования для решения оптимизационной задачи определяется видом зависимостей в математической модели, характером искомых переменных, категорией исходных данных и количеством критериев оптимальности.

Если в математической модели имеются только линейные зависимости между переменными, для решения оптимизационной задачи используются методы *линейного программирования.*

Если в математической модели имеются нелинейные зависимости между переменными, для решения оптимизационной задачи используются методы *нелинейного программирования.*

Если среди переменных имеются целочисленные или дискретные переменные, для решения оптимизационных задач такого класса используются, соответственно, методы *целочисленного или дискретного программирования.*

В случае, когда исходные данные или их часть являются случайными величинами, решение оптимизационной задачи выполняется методами *стохастического программирования*.

При недетерминированной (неопределенной) исходной информации оптимизационные задачи могут быть решены с применением математического аппарата *теории игр*.

Задачи, в которых оптимизация проводится не по одному, а по нескольким критериям, относятся к классу задач *многокритериальной оптимизации*. Решение таких задач заключается в нахождении компромисса между принятыми критериями оптимальности.

1.4. Выполнение вычислений

Решение оптимизационных задач с небольшим количеством переменных x_i (i = 1, 2) при знании алгоритмов методов математического программирования можно выполнить традиционными вычислениями с использованием калькулятора.

Решение реальных задач, размерность которых может быть достаточно большой, возможно только с помощью компьютера. При этом компьютер должен иметь соответствующее программное обеспечение.

Время составления инженерами программ, реализующих тот или иной метод математического программирования для решения оптимизационных задач одного класса, ушло в прошлое. Разработка новых методов решения – дело ученых-математиков. Разработка программного обеспечения компьютеров – дело высококлассных программистов.

Инженер, непосредственно решающий оптимизационные задачи в области своей деятельности, должен уметь *пользоваться* существующим программным обеспечением современных компьютеров. От выделенного курсивом слова и произошел термин «пользователь».

Появление такого мощного программного средства, как Excel 7.0, дает возможность пользователю решать практически любые оптимизационные задачи, совершенно различные по своему классу и содержанию.

Совершенно нельзя полагать, что компьютер может выполнить все. Такие этапы, как формулировка конкретной задачи оптимизации, сбор и подготовка исходной информации, составление математической модели, ввод в компьютер исходных данных и анализ решения должны выполняться пользователем.

В приложениях даются некоторые рекомендации и примеры решения оптимизационных задач различного класса с помощью программного обеспечения Excel 7.0.

1.5. Анализ решения оптимизационной задачи

Никогда не стоит принимать окончательное решение оптимизационной задачи без результатов ее анализа. В качестве главного средства анализа используется математическая модель, позволяющая выполнить параметрический, структурный и многокритериальный анализ задачи.

Параметрическим называется такой анализ, при котором задача решается многократно при различных значениях некоторого исходного данного (параметра). Оценивается влияние этого параметра на результаты решения.

При *структурном* анализе многократное решение задачи выполняется при различной структуре ограничений и граничных условий. Оценивается влияние ограничений и граничных условий на результаты решения.

Решение задачи по различным критериям (с различными целевыми функциями) составляет суть *многокритериального* анализа.

Окончательное решение задачи принимается после исследования всех решений, полученных при параметрическом, структурном и многокритериальном анализах.

В качестве примера составления математической модели рассмотрим *задачу распределения ресурсов*. Под ресурсами понимают, например финансы, энергию, сырье, необходимые для выпуска продукции и получения в конечном итоге прибыли. Естественно стремятся к максимальной прибыли при ограниченном количестве ресурсов.

Пример 1*. Определить максимальную прибыль* предприятия, выпускающего продукцию в виде изделий трех видов (i = 1, 2, 3). Для изготовления каждого i-го изделия требуются три вида ресурсов: энергетические, финансовые и сырьевые (j = 1, 2, 3).

Исходные данные:

наличие на предприятии каждого j-го ресурса b_j;

норма расхода j-го ресурса на одно изделие i-го вида a_{ji};

прибыль z_i от реализации одного i-го изделия;

минимальное количество b_4 всех видов изделий, которое предприятие должно выпустить.

Решение. Обозначим искомые количества 1-го, 2-го и 3-го видов изделий через x_1, x_2 и x_3.

Поскольку необходимо найти максимальную прибыль предприятия, этот экономический критерий и выразим целевой функцией. Прибыль от реализации изделий i-го вида есть произведение $z_i x_i$. Подлежащая максимизации суммарная прибыль от реализации трех видов изделий (целевая функция) будет иметь следующий вид:

$$Z = z_1x_1 + z_2x_2 + z_3x_3 \to \max. \tag{1.4}$$

Перейдем к составлению ограничений. Поскольку на одно изделие 1-го вида требуется a_{11} единиц энергии, на искомое количество x_1 потребуется $a_{11}x_1$ единиц энергии. Для искомых количеств изделий 2-го и 3-го видов потребуется соответственно $a_{12}x_2$ и $a_{13}x_3$ единиц энергии. Суммарный расход энергии на выпуск трех видов изделий составит $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$ единиц энергии. Эта величина ограничена наличием на предприятии энергетических ресурсов в количестве b_1. Таким образом, ограничение по энергетическим ресурсам будет иметь вид

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1.$$

Аналогично составляются ограничения по финансовым и сырьевым ресурсам.

Ограничение минимального суммарного количества выпускаемых изделий запишется как

$$x_1 + x_2 + x_3 \ge b_4.$$

В итоге, вся система ограничений будет иметь вид

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \le b_1, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \le b_2, \\ &a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \le b_3, \\ &x_1 + x_2 + x_3 \ge b_4. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Поскольку количество изделий любого вида не может быть отрицательным числом, граничными условиями будут неотрицательные значения искомых переменных

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \qquad (1.6)$$

Выражения (1.4), (1.5) и (1.6) представляют собой математическую модель поставленной оптимизационной задачи.

Выражения (1.4) и (1.5) являются линейно зависимыми от искомых переменных x_i, следовательно, рассматриваемая оптимизационная задача относится к классу линейных задач, решаемых методами линейного программирования.

2. Линейные оптимизационные задачи

Если целевая функция (1.1) и система ограничений (1.2) являются линейно зависимыми от переменных x_1, x_2, ... x_n, для решения оптимизационной задачи используются методы *линейного программирования*.

Линейная математическая модель в общем случае имеет следующий вид:

$$Z = z_1x_1+z_2x_2+...+z_nx_n \;\rightarrow\; \text{extr},$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \leq b_1, \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n = b_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n \geq b_m, \end{aligned} \qquad (2.1)$$

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, ... n,$$

где z_i, b_j, a_{ji} - заданные постоянные величины, $i = 1.2,\ldots n$; $j = 1, 2, ... m$.

Задача линейного программирования формулируется следующим образом: найти экстремальное значение линейной целевой функции Z при ограничениях, заданных в форме линейных равенств и (или) неравенств, и граничных условиях, указывающих диапазон изменения переменных.

В реальных оптимизационных задачах ищется или минимум или максимум целевой функции. Методы линейного программирования работают совершенно одинаково, как при поиске минимума целевой функции, так и при поиске ее максимума.

Допустим, что в линейной математической модели (2.1) ищется минимум целевой функции

$$Z = z_1x_1+z_2x_2+...+z_nx_n \;\rightarrow\; \min.$$

Если по этой же математической модели нужно найти максимум целевой функции Z, то у коэффициентов целевой функции меняются знаки на противоположные и вновь ищется минимум функции Z

$$Z = -z_1x_1 - z_2x_2 - ... - z_nx_n \rightarrow \min.$$

Таким образом,

$$\min(-z_1x_1 - z_2x_2 - \ldots - z_nx_n) = \max(z_1x_1 + z_2x_2 + \ldots + z_nx_n).$$

2.1. Графическое решение задачи линейного программирования

Этот метод является достаточно простым, наглядным и позволяет сделать некоторые общие выводы по решению оптимизационных задач методами линейного программирования. Однако применение графического метода ограничено задачами относительно небольшой размерности.

Рассмотрим математическую модель линейной оптимизационной задачи, в которой требуется найти минимум целевой функции

$$Z = z_1x_1 + z_2x_2 \rightarrow \min,$$

при ограничениях

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2,$$
$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \leq b_3,$$

и граничных условиях неотрицательности переменных

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2.$$

После введения дополнительных переменных x_3, x_4, x_5 перейдем от ограничений-неравенств к равенствам

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_4 &= b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + x_5 &= b_3. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Отметим, что граничные условия неотрицательности переменных распространяются и на дополнительные переменные:

$$x_i \geq 0, \quad i = 3, 4, 5.$$

Отложим по горизонтальной оси значения переменной x_1, а по вертикальной оси - значения переменной x_2 (рис. 2.1). Учитывая граничные условия ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$), штриховкой выделим полуплоскости допустимых значений переменных x_1 и x_2 (вправо от оси x_2 и вверх от оси x_1).

Рассмотрим одно из ограничений-равенств, например, первое

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + x_3 = b_1$$

и перепишем его в виде

$$x_3 = - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 + b_1.$$

Приравняем переменную x_3 к нулю

$$x_3 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - b_1 = 0.$$

Последнее соотношение представляет собой уравнение прямой линии в плоскости x_1x_2. На этой прямой значение $x_3=0$. Следовательно, по одну сторону от этой прямой $x_3>0$, по другую $x_3<0$. Учитывая граничное условие $x_3 \geq 0$, штриховкой выделим полуплоскость, в которой $x_3>0$.

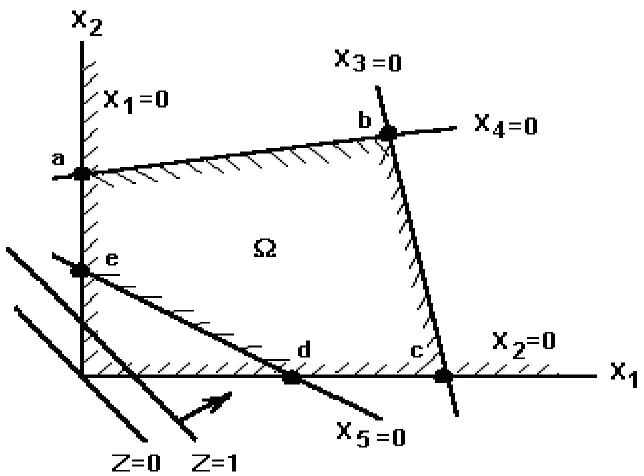


Рис. 2.1. Иллюстрация графического решения задачи

Аналогичные графические построения выполним для второго и третьего ограничений системы (2.2).

В результате выполненных графических построений на плоскости x_1x_2 выделится область Ω допустимых значений переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 (рис. 2.1). Эта область представляет собой выпуклый многогранник *abcde*. Все допустимые решения задачи, в том числе и оптимальное решение, будут принадлежать области Ω.

Рассмотрим выражение целевой функции и приравняем его к нулю

$$Z = z_1x_1+z_2x_2 = 0.$$

В плоскости x_1x_2 это уравнение прямой линии, проходящей через начало координат (рис. 2.1).

Приравняем выражение целевой функции к любому отличному от нуля значению, например, к единице

$$Z = z_1x_1+z_2x_2 = 1$$

и построим в плоскости x_1x_2 соответствующую прямую (рис. 2.1).

Прямые Z=const являются *линиями равного уровня* целевой функции, поскольку на каждой такой линии значение целевой функции неизменно. Линии равного уровня параллельны между собой.

По взаимному расположению линий равного уровня Z=0 и Z=1 определим направление возрастания целевой функции Z. Это направление указано на рис. 2.1 стрелкой.

Перемещая прямую целевой функции Z в направлении ее возрастания параллельно самой себе, определим ближайшую точку, принадлежащую области Ω допустимых значений переменных.

В соответствии с графическими построениями такой точкой будет вершина *e* многогранника Ω (рис. 2.1). Эта вершина и будет соответствовать минимуму целевой функции, т.е. оптимальному решению задачи.

Минимальное значение целевой функции Z достигается при следующих значениях переменных:

$$x_2>0,\ \ x_3>0,\ \ x_4>0,\ \ x_1=0,\ \ x_5=0.$$

Три переменные отличаются от нуля, две переменные равны нулю. Видно, что количество не равных нулю переменных равно количеству ограничений. Остальные переменные равны нулю.

Пусть в рассмотренной выше линейной задаче требуется найти максимум целевой функции Z. Как было отмечено выше, в этом случае ищется минимум целевой функции с измененными знаками коэффициентов z_i

$$Z = - z_1x_1 - z_2x_2 \ \rightarrow \ \min.$$

Ограничения и граничные условия при этом не меняются.

На рис. 2.2 выполнено графическое решение задачи. Из построения прямых

$$Z = -z_1x_1 - z_2x_2 = 0 \quad \text{и} \quad Z = -z_1x_1 - z_2x_2 = 1 \ \text{ или } \ Z = z_1x_1 + z_2x_2 = -1$$

видно, что изменение знаков коэффициентов z_1 и z_2 обусловило изменение направления возрастания целевой функции на противоположное (см. стрелку на рис. 2.2). Очевидно, что в этом случае минимуму целевой функции отвечает вершина *b* многогранника Ω.

Таким образом, задачи минимизации и максимизации целевой функции решаются совершенно одинаково. Следует только иметь в виду, что

$$\min(-z_1x_1 - z_2x_2 - \ldots - z_nx_n) = \max(z_1x_1 + z_2x_2 + \ldots + z_nx_n).$$

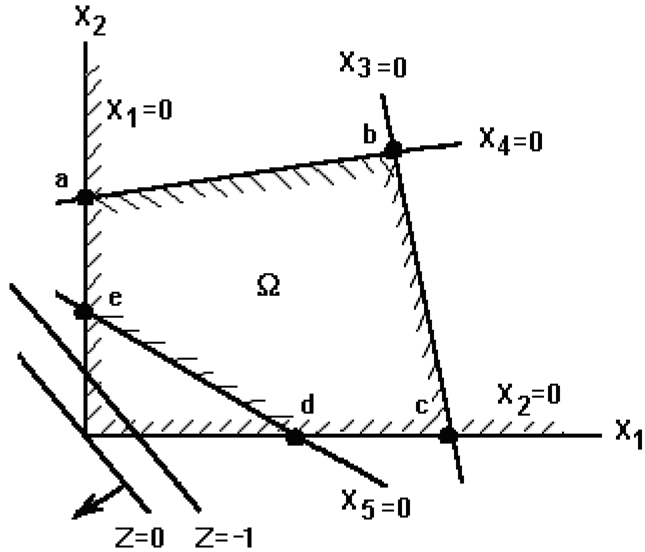


Рис. 2.2. Определение максимума целевой функции

На основании выполненного графического решения задачи линейного программирования можно сделать следующие общие выводы по решению линейной оптимизационной задачи:

оптимальное решение задачи всегда находится в одной из вершин многогранника Ω, поэтому для отыскания оптимального решения достаточно рассмотреть только конечное количество решений, лежащих в вершинах многогранника Ω, и не рассматривать бесконечное количество решений, лежащих на гранях и внутри этого многогранника;

в каждом решении, отвечающем одной из вершин многогранника Ω, количество положительных (не равных нулю) переменных равно количеству ограничений m, остальные $(n-m)$ переменные равны нулю;

для отыскания оптимального решения следует рассмотреть только те решения, в которых содержится m переменных, не равных нулю, и $(n-m)$ переменных, равных нулю.

В дальнейшем отличные от нуля положительные переменные будем называть *базисными*, нулевые переменные - *свободными*. В каждом рассматриваемом решении количество базисных переменных равняется количеству ограничений m, а количество свободных переменных равняется $(n-m)$.

Поскольку количество базисных и свободных переменных в рассматриваемых решениях не меняется, *при переходе от одного решения к другому (от одной вершины многогранника Ω к другой) одна из базисных переменных становится свободной, а одна из свободных переменных становится базисной.*

2.2. Алгебраические преобразования систем линейных уравнений

Рассмотрим, как преобразуется исходная система ограничений-равенств в математической модели (2.2) при переходе от одного решения к другому, т.е. при переводе одной из свободных переменных в разряд базисных, а одной из базисных переменных в разряд свободных. Перепишем систему (2.2):

$$\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+x_4 &= b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+x_5 &= b_3. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Начальный выбор свободных и базисных переменных может быть произвольным. Однако структура системы (2.3) такова, что в качестве базисных переменных удобно принять переменные x_3, x_4 и x_5, а в качестве свободных - переменные x_1 и x_2. В этом случае сразу же получаем некоторое исходное решение системы (2.3):

свободные переменные $x_1=0$, $x_2=0$;
базисные переменные $x_3=b_1$, $x_4=b_2$, $x_5=b_3$.

Каждая базисная переменная входит только в одно уравнение системы и имеет коэффициент, равный единице. Поэтому количество базисных переменных равно количеству ограничений. Остальные переменные свободные.

Запишем исходную систему (2.3) в более подробном виде, а базисные переменные и коэффициенты при них выделим жирным шрифтом

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \mathbf{1\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 0\cdot x_5} = b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \mathbf{0\cdot x_3 + 1\cdot x_4 + 0\cdot x_5} = b_2;\\
&a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \mathbf{0\cdot x_3 + 0\cdot x_4 + 1\cdot x_5} = b_3.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Допустим, что свободную переменную x_1 следует перевести в разряд базисных, а базисную переменную x_3 - в разряд свободных. Эта процедура достаточно проста и неоднократно использовалась при решении систем линейных уравнений в школьном курсе алгебры.

Суть процедуры заключается в следующем: из первого уравнения системы выражается переменная x_1 и подставляется во второе и третье уравнения системы. В результате такого преобразования свободная переменная x_1 становится базисной, а базисная переменная x_3 становится свободной.

Рассмотрим подробнее указанное преобразование. Столбец, отвечающий свободной переменной x_1, переводимой в разряд базисных (первый столбец), назовем *разрешающим столбцом*. Строку, отвечающую базисной переменной x_3, переводимой в разряд свободных (первую строку), назовем *разрешающей строкой*. Коэффициент, стоящий на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца (a_{11}), назовем *разрешающим коэффициентом*.

Поделив первое уравнение на разрешающий коэффициент, получим

$$
1\cdot x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{1}{a_{11}}x_3 + \frac{0}{a_{11}}x_4 + \frac{0}{a_{11}}x_5 = \frac{b_1}{a_{11}}. \tag{2.5}
$$

Выразим из этого уравнения переменную x_1

$$
1\cdot x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{1}{a_{11}}x_3 - \frac{0}{a_{11}}x_4 - \frac{0}{a_{11}}x_5 - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2.
$$

Подставляя значение x_1 во второе и третье уравнения системы (2.4), после несложных преобразований получим совместно с уравнением (2.5) новую преобразованную систему уравнений

$$
\mathbf{1\cdot x_1} + \frac{a_{12}}{\ }x_2 + \frac{1}{\ }x_3 + \frac{\mathbf{0}}{\ }\mathbf{x_4} + \frac{\mathbf{0}}{\ }\mathbf{x_5} = \frac{b_1}{\ }; \tag{2.6}
$$

$$a_{11} \qquad a_{11} \qquad \boldsymbol{a_{11}} \qquad \boldsymbol{a_{11}} \qquad a_{11}$$

$$\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{x_1}+\left(a_{22}-\frac{a_{21}\,a_{12}}{a_{11}}\right)x_2+\left(0-\frac{1\cdot a_{21}}{a_{11}}\right)x_3+\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{a_{12}}}{\boldsymbol{a_{11}}}\right)\boldsymbol{x_4}+\left(\mathbf{0}-\frac{\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{a_{21}}}{\boldsymbol{a_{11}}}\right)\boldsymbol{x_5}=b_2-\frac{b_1a_{21}}{a_{11}};$$

$$\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{x_1}+\left(a_{32}-\frac{a_{12}\,a_{31}}{a_{11}}\right)x_2+\left(0-\frac{1\cdot a_{31}}{a_{11}}\right)x_3+\left(\mathbf{0}-\frac{\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{a_{31}}}{\boldsymbol{a_{11}}}\right)\boldsymbol{x_4}+\left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{a_{31}}}{\boldsymbol{a_{11}}}\right)\boldsymbol{x_5}=b_3-\frac{b_1\cdot a_{31}}{a_{11}}.$$

Коэффициенты преобразованной системы (2.6) пометим штрихом и запишем эту систему в более простом виде

$$\begin{aligned}
&\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{x_1}+a'_{12}\,x_2+a'_{13}\,x_3+\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{x_4}+\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{x_5}=b'_1;\\
&\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{x_1}+a'_{22}\,x_2+a'_{23}\,x_3+\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{x_4}+\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{x_5}=b'_2; \qquad (2.7)\\
&\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{x_1}+a'_{32}\,x_2+a'_{33}\,x_3+\mathbf{0}\cdot\boldsymbol{x_4}+\mathbf{1}\cdot\boldsymbol{x_5}=b'_3.
\end{aligned}$$

В этой системе свободными будут переменные x_2 и x_3, а базисными – переменные x_1, x_4 и x_5. Новое решение

свободные переменные $x_2=0$, $x_3=0$;
базисные переменные $x_1=b'_1$, $x_4=b'_2$, $x_5=b'_3$.

Переменная x_1 стала базисной, а переменная x_3 - свободной. В системах (2.6) и (2.7) базисные переменные и коэффициенты при них выделены жирным шрифтом.

Анализ систем (2.6) и (2.7) позволяет сформулировать три правила пересчета коэффициентов при переводе одной из базисных переменных в разряд свободных, а одной из свободных переменных в разряд базисных:

1. Все коэффициенты, не принадлежащие разрешающей строке и разрешающему столбцу, пересчитываются по выражению

$$a_{ij}' = a_{ij} - a_{jr}\,a_{ri}/a_{rr}, \qquad (2.8)$$

где a_{ij} - коэффициент, лежащий на пересечении i-й строки и j-го столбца;
a_{ij}' - новое пересчитанное значение коэффициента a_{ij};
a_{rr} - разрешающий коэффициент;
a_{ir} - коэффициент, лежащий на пересечении i-й строки и разрешающего столбца;

a_{rj} - коэфффициент, лежащий на пересечении разрешающей строки и j-го столбца.

2. Все коэффициенты разрешающей строки делятся на разрешающий коэффициент a_{rr}. Разрешающий коэффициент при этом становится равным единице a_{rr}=1.

3. Все коэффициенты разрешающего столбца, кроме разрешающего коэффициента, заменяются нулями.

Таким образом, переход от одного решения к другому заключается в пересчете коэффициентов системы уравнений по правилам 1, 2 и 3, изложенным выше.

При решении реальных оптимизационных задач удобно пользоваться табличной формой записи систем уравнений. Запишем исходную систему (2.4) в виде табл. 2.1, выделив разрешающие строку и столбец.

Т а б л и ц а 2.1

x_1	x_2	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	b
a_{11}	a_{12}	**1**	**0**	**0**	b_1
a_{21}	a_{22}	**0**	**1**	**0**	b_2
a_{31}	a_{32}	**0**	**0**	**1**	b_3

Пересчитав по правилам 1, 2 и 3 коэффициенты этой таблицы, получим новую таблицу 2.2, отвечающую преобразованной системе (2.7).

Т а б л и ц а 2.2

$\mathbf{x_1}$	x_2	x_3	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	b
1	$a'_{12}=a_{12}/a_{11}$	$a'_{13}=1/a_{11}$	**0**	**0**	$b'_1=b_1/a_{11}$
0	$a'_{22}=a_{22}-a_{21}a_{12}/a_{11}$	$a'_{23}=0-a_{21}\cdot 1/a_{11}$	**1**	**0**	$b'_2=b_2-a_{21}b_1/a_{11}$
0	$a'_{32}=a_{32}-a_{31}a_{12}/a_{11}$	$a'_{33}=0-a_{31}\cdot 1/a_{11}$	**0**	**1**	$b'_3=b_3-a_{31}b_1/a_{11}$

В таблицах 2.1 и 2.2 базисные переменные и коэффициенты при них выделены жирным шрифтом.

2.3. Симплекс-метод

Симплекс-метод является *универсальным* аналитическим методом решения задач линейного программирования. Симплекс – понятие геометрическое, означающее совокупность вершин многомерного тела. Идея симплекс-метода заключается в последовательном переборе решений – в последовательном переходе от одной вершины к другой. Однако этот перебор не хаотичный, а таков, что на каждом шаге решение улучшается [4].

Метод состоит из двух этапов: на первом этапе ищется допустимое решение; на втором этапе это допустимое решение улучшается до оптимального.

Алгоритм метода рассмотрим на примере линейной модели п.2.1, где требуется найти минимум целевой функции

$$Z = z_1x_1+z_2x_2 \rightarrow \min, \tag{2.9}$$

при ограничениях-равенствах

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2 + x_3 = b_1, \\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2 + x_4 = b_2, \\ &a_{31}x_1+a_{32}x_2 + x_5 = b_3 \end{aligned} \tag{2.10}$$

и граничных условиях неотрицательности переменных

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2,...5. \tag{2.11}$$

Перейдем к табличной форме записи. В отличие от табл. 2.1 в исходную таблицу введем строку целевой функции (нижняя строка табл. 2.3).

Т а б л и ц а 2.3

x_1	x_2	$\mathbf{x_3}$	$\mathbf{x_4}$	$\mathbf{x_5}$	b
a_{11}	a_{12}	**1**	**0**	**0**	b_1
a_{21}	a_{22}	**0**	**1**	**0**	b_2
a_{31}	a_{32}	**0**	**0**	**1**	b_3
z_1	z_2	**0**	**0**	**0**	$-Z$

Исходное решение:

$$x_1=0, \ \ x_2=0, \ \ x_3=b_1, \ \ x_4=b_2, \ \ x_5=b_3. \tag{2.12}$$

В соответствии с выражением (2.9) исходное значение целевой функции Z=0.

1 этап. Получение допустимого решения. Любое допустимое решение должно удовлетворять системе ограничений-равенств и граничным условиям.

Исходное решение (2.12) удовлетворяет системе ограничений-равенств (2.10). Это решение будет удовлетворять граничным условиям (2.11) в том случае, когда свободные члены $b_1 \geq 0$, $b_2 \geq 0$ *и* $b_3 \geq 0$. Следовательно, *условием получения допустимого решения является неотрицательность свободных членов ограничений-равенств.*

Если все $b_j \geq 0$ $(j=1,2,...m)$, то полученное решение является допустимым. Далее осуществляется переход ко 2-му этапу метода.

Если среди свободных членов есть отрицательные, то выбирается любой из них и соответствующая строка принимается в качестве разрешающей. Базисная переменная, отвечающая разрешающей строке, будет переводиться в разряд свободных.

Просматривается разрешающая строка. Из коэффициентов этой строки выбираются отрицательные коэффициенты. Если в разрешающей строке нет отрицательных коэффициентов, то оптимизационная задача не имеет решения. Если в разрешающей строке имеется несколько отрицательных коэффициентов, то выбирается любой из них и соответствующий этому коэффициенту столбец принимается в качестве разрешающего.

Свободная переменная, соответствующая разрешающему столбцу, будет переводиться в базис. Разрешающий коэффициент находится на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца.

Выполняется пересчет всех коэффициентов табл. 2.3 по правилам 1, 2 и 3 п. 2.2. Пересчету подвергаются и коэффициенты z_i $(i=1,2,...n)$ целевой функции и значение целевой функции, которое находится в правом нижнем углу табл. 2.3. В силу принятой формы записи таблицы значение целевой функции получается с обратным знаком. Поэтому в соответствующей ячейке табл. 2.3 стоит величина $-Z$.

Разрешающая строка выбрана по отрицательному коэффициенту $b_j<0$. Разрешающий столбец выбран по отрицательному коэффициенту $a_{ji}<0$, который и является разрешающим коэффициентом a_{rr}. В результате пересчета коэффициентов табл. 2.3 в соответствии с правилом 2 п.2.2 ($b_j'=b_j/a_{rr}$) новый свободный член b_j' сменит знак и станет положительным.

Вычислительная процедура, т.е. выбор разрешающих строки, столбца и пересчет всех коэффициентов табл. 2.3, продолжается до выполнения условия $b_j \geq 0$, $j=1,2,...m$, при котором полученное решение будет допустимым.

Предположим, что допустимому решению соответствует табл. 2.4. Переменные x_1, x_4 и x_5 базисные, а переменные x_2 и x_3 свободные. Допустимое решение:

$$x_2=0,\ \ x_3=0,\ \ x_1=b_1',\ \ x_4=b_2',\ \ x_5=b_3',\ \ Z=Z_0. \qquad (2.13)$$

Напомним, что значение целевой функции в правом нижнем углу табл. 2.4 имеет обратный знак.

Т а б л и ц а 2.4

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	B
1	a_{12}'	a_{13}'	**0**	**0**	b_1'
0	a_{22}'	a_{23}'	**1**	**0**	b_2'
0	a_{32}'	a_{33}'	**0**	**1**	b_3'
0	z_2'	z_3'	**0**	**0**	$-Z=-Z_0$

2 этап. Получение оптимального решения. Пусть оптимальному решению соответствует минимальное значение целевой функции Z. Необходимо проверить возможность улучшения полученного на первом этапе допустимого решения, то есть проверить возможность уменьшения значения целевой функции Z.

Перевод свободной переменной в базис соответствует увеличению этой переменной от нуля до некоторого положительного значения. Просмотрим коэффициенты строки целевой функции (нижней строки табл. 2.4). Очевидно, что перевод любой из свободных переменных (x_2 или x_3) в базис приведет к уменьшению целевой функции, если коэффициент при этой переменной будет отрицательным ($z_2'<0$ или $z_3'<0$). Если коэффициенты $z_2'>0$ и $z_3'>0$, перевод любой из свободных переменных (x_2 или x_3) в базис приведет к увеличению целевой функции.

Следовательно, условием получения оптимального решения при минимизации целевой функции является неотрицательность коэффициентов целевой функции $z_i'\geq 0$.

Если среди коэффициентов целевой функции есть отрицательные, то берется любой из них и соответствующий этому коэффициенту столбец принимается в качестве разрешающего. Свободная переменная, отвечающая разрешающему столбцу, будет переводиться в базис.

Допустим, что коэффициент $z_3'<0$. Свободную переменную x_3 будем переводить в базис, а третий столбец табл. 2.3 будет разрешающим.

Для выбора разрешающей строки рассмотрим систему ограничений-равенств, соответствующую допустимому решению

$$\begin{aligned} &x_1+a_{12}'x_2+a_{31}'x_3=b_1', \\ &\quad a_{22}'x_2+a_{32}'x_3+x_4=b_2', \end{aligned} \qquad (2.14)$$

$$a_{32}'x_2 + a_{33}'x_3 \qquad + x_5 = b_3'.$$

Переменная x_2 свободная (x_2=0). С учетом этого перепишем систему (2.14) в более простом виде

$$\begin{aligned} x_1 + a_{13}'x_3 &= b_1', \\ a_{23}'x_3 + x_4 &= b_2', \\ a_{33}'x_3 \qquad + x_5 &= b_3'. \end{aligned} \tag{2.15}$$

При переводе переменной x_3 в базис (при увеличении этой переменной от нуля в положительную сторону) базисные переменные x_1, x_4 и x_5 будут изменяться в соответствии с равенствами (2.15). Если коэффициенты разрешающего столбца $a_{13}'>0$, $a_{23}'>0$ и $a_{33}'>0$, базисные переменные будут уменьшаться. При каком-то положительном значении переменной x_3 одна из базисных переменных первой достигнет нуля и станет свободной.

Если есть отрицательные коэффициенты, например, $a_{23}'<0$, то соответствующая базисная переменная x_4 будет увеличиваться и в разряд свободных не перейдет. Поэтому в разрешающем столбце принимаются во внимание только положительные коэффициенты a_{ji}.

Допустим, что коэффициенты $a_{13}'>0$ *и* $a_{33}'>0$. Базисная переменная x_1 достигнет нуля при значении $x_3=b_1'/a_{13}'$. Базисная переменная x_3 достигнет нуля при значении $x_3=b_3'/a_{33}'$. Очевидно, что из двух базисных переменных x_1 и x_5 первой достигнет нуля и станет свободной та переменная, для которой отношение b_j'/a_{ji}'=min.

Для выбора разрешающей строки вычисляются все положительные отношения b_j'/a_{ji}'. Строка, отвечающая наименьшему из этих отношений b_j'/a_{ji}'=min, принимается в качестве разрешающей. Базисная переменная, соответствующая разрешающей строке, будет переводиться в разряд свободных.

Разрешающий коэффициент находится на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца.

Выполняется пересчет всех коэффициентов табл. 2.4 по правилам 1, 2 и 3 п. 2.2.

Вычислительная процедура, т.е. выбор разрешающих строки, столбца и пересчет всех коэффициентов, продолжается до выполнения условия $z_i \geq 0$, $i=1,2,...n$, при котором полученное решение будет оптимальным (достигнут минимум целевой функции Z).

При поиске максимума целевой функции Z первый этап (поиск допустимого решения) выполняется совершенно аналогично. На втором этапе *условием получения оптимального решения при* *максимизации целевой функции будет неположительность коэффициентов целевой функции* $z_i' \leq 0$.

Алгоритм симплекс-метода:

1. Система ограничений преобразуется к виду (2.10), удобному для разделения переменных на свободные и базисные.
2. Система ограничений и целевая функция записываются в виде таблицы 2.3.
3. Записывается исходное решение, в котором свободные переменные равны нулю, базисные переменные равны свободным членам ограничений, значение целевой функции равно нулю.
4. Просматривается столбец свободных членов b_j. Если все $b_j \geq 0$, то решение является допустимым и осуществляется переход к п. 7. Если есть свободные члены b_j<0, то выбирается любой из них и соответствующая строка будет разрешающей.
5. Просматриваются коэффициенты a_{ji} разрешающей строки. Если все эти коэффициенты положительны, задача не имеет решения. Если среди коэффициентов a_{ji} разрешающей строки есть отрицательные, то выбирается любой из них и соответствующий столбец будет разрешающим.
6. Выполняется пересчет всех коэффициентов таблицы, включая значение целевой функции, которое имеет противоположный знак. Осуществляется переход к п.4.
7. Просматриваются коэффициенты z_i строки целевой функции. Если все эти коэффициенты $z_i \leq 0$ (при поиске минимума Z) или $z_i \geq 0$ (при поиске максимума Z), то текущее решение будет оптимальным. Вычислительная процедура заканчивается.
8. Если есть коэффициенты $z_i > 0$ (при поиске минимума Z) или $z_i < 0$ (при поиске максимума Z), то выбирается любой из них и соответствующий столбец будет разрешающим. Вычисляются отношения свободных членов b_j к положительным коэффициентам a_{ji} разрешающего столбца. Строка, отвечающая минимальному из этих отношений, будет разрешающей.
9. Выполняется пересчет всех коэффициентов таблицы. Осуществляется переход к п. 7.

Пример 2. Решить задачу *примера* 1 симплекс-методом при следующих исходных данных:

прибыль от реализации одного изделия 1, 2 и 3 видов:
$z_1 = 8$; $z_2 = 11$; $z_3 = 12$ у.е./изд.;
нормы расхода энергии на одно изделие:
$a_{11} = 2$; $a_{12} = 2$; $a_{13} = 3$ е.э./изд. (единиц энергии/изделие)

нормы расхода финансовых средств на одно изделие:

$a_{21} = 6$; $a_{22} = 5{,}5$; $a_{23} = 4$ у.е./изд.

нормы расхода сырья на одно изделие:

$a_{31} = 4$; $a_{32} = 6$; $a_{33} = 8$ е.с./изд. (единиц сырья/изделие)

наличие на предприятии энергетических, финансовых и сырьевых ресурсов:

$b_1 = 50$ е.э.; $b_2 = 100$ у.е.; $b_3 = 150$ е.с.

минимальное количество всех видов изделий, которое предприятие должно выпустить $b_4 = 15$ изд.

Решение. В соответствии с выражением (1.5) и исходными данными целевая функция запишется в виде

$$Z = 8x_1 + 11x_2 + 12x_3 \rightarrow \max. \qquad (2.16)$$

В соответствии с выражениями (1.6) и исходными данными система ограничений запишется в виде

$$\begin{aligned} &2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 50, \\ &6x_1 + 5{,}5x_2 + 4x_3 \le 100, \qquad (2.17) \\ &4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \le 150, \\ &x_1 + x_2 + x_3 \ge 15. \end{aligned}$$

После введения дополнительных переменных x_4, x_5, x_6 и x_7 перейдем от ограничений-неравенств к равенствам

$$\begin{aligned} &2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 50, \\ &6x_1 + 5{,}5x_2 + 4x_3 + x_5 = 100, \qquad (2.17а) \\ &4x_1 + 6x_2 + 8x_3 + x_6 = 150, \\ &-x_1 - x_2 - x_3 + x_7 = -15. \end{aligned}$$

Граничные условия неотрицательности переменных имеют вид

$$\begin{aligned} &x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0, \\ &x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0,\ x_6 \ge 0,\ x_7 \ge 0. \qquad (2.18) \end{aligned}$$

Для получения исходного решения удобно принять в качестве базисных переменные x_4, x_5, x_6, x_7, остальные переменные x_1, x_2, x_3 – свободные. Запишем систему ограничений и целевую функцию в виде табл. 2.5.

Т а б л и ц а 2.5

x_1	x_2	x_3	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{x_6}$	$\boldsymbol{x_7}$	$b; Z$
2	2	3	**1**	**0**	**0**	**0**	50
6	5,5	4	**0**	**1**	**0**	**0**	100

4	6	8	**0**	**0**	**1**	**0**	150
-1	-1	-1	**0**	**0**	**0**	**1**	-15
8	11	12	**0**	**0**	**0**	**0**	-*Z*=0

Исходное решение:

свободные переменные $x_1 = x_2 = x_3 = 0$;

базисные переменные: x_4=50, x_5=100, x_6=150, x_7 = -15;

значение целевой функции Z=0.

В исходном решении имеем отрицательную переменную x_7= -15. Граничные условия не выполняются. Исходное решение не является допустимым.

Четвертую строку (строку с отрицательным свободным членом b_4=-15) принимаем в качестве разрешающей. Базисную переменную x_7, находящуюся в разрешающей строке, будем переводить в разряд свободных.

Просматриваем разрешающую строку. Из трех отрицательных коэффициентов этой строки произвольно выбираем коэффициент -1 при переменной x_3 и третий столбец табл. 2.5 принимаем в качестве разрешающего. Свободную переменную x_3 будем переводить в базис. Разрешающий коэффициент, находящийся на пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца выделен.

Производим пересчет всех коэффициентов табл. 2.5 по правилам 1, 2 и 3 п. 2.2. В результате пересчета получим табл. 2.6, отвечающую новому решению.

Т а б л и ц а 2.6

x_1	x_2	$\boldsymbol{x_3}$	$\boldsymbol{x_4}$	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{x_6}$	x_7	*b; Z*
-1	-1	**0**	**1**	**0**	**0**	3	5
2	1,5	**0**	**0**	**1**	**0**	4	40
-4	-2	**0**	**0**	**0**	**1**	8	30
1	1	**1**	**0**	**0**	**0**	-1	15
-4	-1	**0**	**0**	**0**	**0**	12	-*Z*=-180

В новом решении:

свободные переменные x_1=0, x_2=0, x_7=0;

базисные переменные x_3=15, x_4=5, x_5=40, x_6=30;

значение целевой функции Z = 180.

В этом решении все переменные неотрицательные. Граничные условия выполняются. Полученное решение является *допустимым*.

Для проверки этого решения на оптимальность просматриваем коэффициенты строки целевой функции. В этой строке имеется один положительный коэффициент целевой функции, равный 12. Следовательно, имеется возможность увеличения целевой функции. Седьмой столбец принимаем в качестве разрешающего, а свободную переменную x_7 будем переводить в базис.

Вычисляем положительные отношения свободных членов к коэффициентам разрешающего столбца: 5/3=1,67, 40/4=10 и 30/8=3,75. Первую строку, отвечающую минимальному из этих отношений, принимаем в качестве разрешающей. Базисную переменную x_4, отвечающую разрешающей строке, будем переводить в разряд свободных. Разрешающий коэффициент выделен.

Производим пересчет всех коэффициентов табл. 2.6 и получаем табл. 2.7, отвечающую новому допустимому решению.

Т а б л и ц а 2.7

x_1	x_2	$\boldsymbol{x_3}$	x_4	$\boldsymbol{x_5}$	$\boldsymbol{x_6}$	$\boldsymbol{x_7}$	*b; Z*
-0,33	-0,33	**0**	0,33	**0**	**0**	**1**	1,67
3,33	2,83	**0**	-1,33	**1**	**0**	**0**	33,33
-1,33	0,67	**0**	-2,67	**0**	**1**	**0**	16,67
0,67	0,67	**1**	0,33	**0**	**0**	**0**	16,67
0	3	**0**	-4	**0**	**0**	**0**	-*Z*=-200

В этом допустимом решении:

свободные переменные x_1=0, x_2=0, x_4=0;

базисные переменные x_3=16,67, x_5=33,33, x_6=16,67, x_7=1,67;

значение целевой функции Z = 200.

В строке целевой функции есть положительный коэффициент, равный 3. Следовательно, полученное решение не является оптимальным. Второй столбец принимаем в качестве разрешающего и свободную переменную x_2 переводим в базис.

Для положительных коэффициентов разрешающего столбца вычисляем положительные отношения свободных членов к коэффициентам разрешающего столбца: 33,33/2,83=11,78; 16,67/0,67=25 и 16,67/0,67=25. Вторую строку, отвечающую минимальному из этих отношений, принимаем в качестве разрешающей. Базисную переменную x_5 будем переводить в разряд свободных. Разрешающий коэффициент выделен.

Производим пересчет всех коэффициентов табл. 2.7 и получаем табл. 2.8, отвечающую новому допустимому решению.

Таблица 2.8

x_1	$\boldsymbol{x_2}$	$\boldsymbol{x_3}$	x_4	x_5	$\boldsymbol{x_6}$	$\boldsymbol{x_7}$	$b; Z$
0,06	**0**	**0**	0,17	0,12	**0**	**1**	5,59
1,18	**1**	**0**	-0,47	0,35	**0**	**0**	11,76
2,12	**0**	**0**	-2,36	0	**1**	**0**	8,82
-0,12	**0**	**1**	0,64	-0,24	**0**	**0**	8,82
-3,53	**0**	**0**	-2,59	-1,06	**0**	**0**	$-Z$=-235,29

В этом допустимом решении:

свободные переменные $x_1=0$, $x_4=0$, $x_5=0$;

базисные переменные $x_2=11{,}76$, $x_3=8{,}82$, $x_6=8{,}82$, $x_7=5{,}59$;

значение целевой функции $Z = 235{,}29$.

Полученное решение является оптимальным, поскольку все коэффициенты в строке целевой функции неположительны и, следовательно, нет возможности дальнейшего увеличения целевой функции. Максимальная прибыль $Z = 235{,}29$ у.е.

Несложно проверить, что все четыре ограничения (2.17а) и граничные условия (2.18) выполняются.

Количество изделий не может быть дробным числом. Поэтому округляем результаты до ближайших целых чисел.

Итак, для получения предприятием максимальной прибыли изделия 1-го вида выпускать не следует; изделия 2-го и 3-го видов следует выпустить в количестве $x_2 \cong 12$ и $x_3 \cong 9$ соответственно.

Значение дополнительной переменной $x_7 \cong 6$ свидетельствует о том, что суммарный выпуск изделий (12+9=21) на 6 изделий превышает минимальное количество изделий (15), которое предприятие должно выпустить.

Нулевые значения дополнительных переменных $x_4=0$ и $x_5=0$ свидетельствуют о полном расходовании финансовых и энергетических ресурсов. Сырьевые ресурсы остаются в количестве 9 е.с. (дополнительная переменная $x_6 \cong 9$).

Решение рассмотренной оптимизационной задачи с помощью программного обеспечения Excel 7.0 приведено в приложении 2.

3. Транспортные задачи электроэнергетики

3.1. Постановка транспортной задачи

Транспортная задача - это задача отыскания таких путей перевозки продукта от пунктов производства к пунктам потребления, при которых общая стоимость перевозок оказывается минимальной.

Математический аппарат транспортной задачи применим и к задачам электроэнергетики. Здесь под продуктом подразумевается электрическая мощность, передаваемая от источников питания к потребителям по линиям электропередачи. Источниками питания являются электрические станции или подстанции, потребителями - промышленные, городские, сельскохозяйственные потребители электроэнергии. Оптимизации подлежат затраты на схему электрической сети, состоящей из линий электропередачи, связывающих узлы источников питания с узлами потребителей.

Пусть в проектируемой системе электроснабжения имеется $i = 1, 2, \ldots n$ узлов источников питания и $j = 1, 2, \ldots m$ узлов потребителей. Мощность каждого из источников составляет A_i, а мощность каждого из потребителей - B_j единиц мощности (е.м.). Известно взаимное расположение узлов источников и потребителей. Стоимость передачи единицы мощности от источника i к потребителю j (удельная стоимость) составляет z_{ij} у.е./е.м.

Общее количество возможных к строительству линий электропередачи, связывающих источники с потребителями, составляет nm. Мощности, передаваемые по этим линиям, являются искомыми переменными x_{ij}, следовательно, количество искомых переменных составляет nm.

Затраты на электрическую сеть равны сумме произведений удельных стоимостей на величины передаваемых мощностей от источников i к потребителям j. Поэтому подлежащая минимизации целевая функция имеет следующий вид:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} z_{ij}\, x_{ij} \rightarrow \min. \qquad (3.1)$$

С позиций теоретической электротехники электрическая сеть является электрической цепью и для этой сети применимы все законы, известные из курса электротехники, в частности 1-й закон Кирхгофа. Для каждого i-го источника питания сумма мощностей, оттекающих по линиям ко всем $j=1,2,\ldots m$ узлам потребителей, равна мощности A_i этого источника

m

$$\sum_{j=1} x_{ij} = A_i. \qquad (3.2)$$

Для каждого j-го потребителя сумма мощностей, притекающих по линиям от всех i=1,2,...n источников, равна мощности B_j этого потребителя

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = B_j. \qquad (3.2а)$$

Соотношения (3.2) и (3.2а), представляющие собой балансы мощности в каждом из узлов, являются ограничениями при решении транспортной задачи. Общее количество ограничений равно количеству узлов источников и потребителей $n+ m$.

Из теоретической электротехники известно, что для любой электрической сети количество независимых уравнений, составленных по 1-му закону Кирхгофа, на единицу меньше количества узлов и составляет (n+m-1). Следовательно, количество независимых ограничений составляет (n+m-1). Количество базисных (не равных нулю) переменных равняется количеству независимых ограничений и составляет (n+m-1). Остальные переменные являются свободными (равными нулю). Количество свободных переменных составляет (nm-(n+m-1)).

Каждая базисная переменная x_{ij} соответствует присутствию в схеме линии между узлами i и j, поскольку мощность, протекающая между узлами i и j, не равна нулю. Каждая свободная переменная x_{ij} соответствует отсутствию в схеме линии между узлами i и j, поскольку мощность, протекающая между узлами i и j, равна нулю.

В рассматриваемой постановке транспортной задачи все искомые мощности x_{ij}, передаваемые от источников к потребителям, являются неотрицательными. Следовательно, граничные условия имеют вид

$$x_{ij} \geq 0, \quad i=1, 2, \dots n; \; j=1, 2, \dots m. \qquad (3.3)$$

Выражения (3.1), (3.2), (3.2а) и (3.3) представляют собой математическую модель транспортной задачи. Видно, что выражения целевой функции (3.1) и ограничений (3.2) и (3.2а) являются линейными. Следовательно, транспортная задача может быть решена симплекс-методом.

Однако непосредственное применение этого метода к решению транспортной задачи оказывается нецелесообразным. В силу своей универсальности симплекс-метод имеет достаточно сложную вычислительную процедуру и без учета специфических особенностей транспортной задачи ее решение оказывается слишком громоздким.

Особенности транспортной задачи следующие:

все ограничения имеют форму равенств;

все коэффициенты при переменных в системе ограничений равны плюс единице;

каждая переменная дважды входит в систему ограничений; один раз в балансы узлов источников (3.2), второй раз в балансы узлов потребителей (3.2а).

С учетом этих особенностей для решения транспортных задач разработаны специальные методы решения, более простые, чем симплекс-метод.

Пример 3. В проектируемой системе электроснабжения имеется два узла с источниками питания и три узла потребителей. Мощности источников составляют A_1 и A_2, а мощности потребителей - B_1, B_2 и B_3 е.м. Взаимное расположение узлов и возможные к сооружению линии электрической сети показаны на рис. 3.1. Удельные затраты на передачу мощностей по линиям между узлами источников и потребителей составляют z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{21}, z_{22}, z_{23} у.е./е.м.

Составить математическую модель для решения транспортной задачи.

Решение. Целевая функция, представляющая собой суммарные денежные затраты на электрическую сеть, в соответствии выражением (3.1) будет иметь вид

$$Z = z_{11}x_{11}+z_{12}x_{12}+z_{13}x_{13}+z_{21}x_{21}+z_{22}x_{22}+z_{23}x_{23} \rightarrow \min.$$

Ограничения, представляющие собой балансы мощности в узлах электрической сети, в соответствии с выражениями (3.2) и (3.2а) будут иметь следующий вид:

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}=A_1,$$
$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=A_2,$$

$$x_{11}+x_{21}=B_1,$$
$$x_{12}+x_{22}=B_2,$$
$$x_{13}+x_{23}=B_3.$$

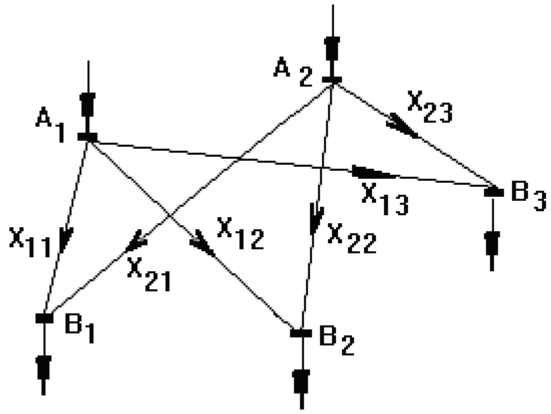


Рис. 3.1. Взаимное расположение узлов и возможные к сооружению линии электрической сети

Граничные условия в соответствии с соотношением (3.3) запишутся как

$x_{11} \geq 0, x_{12} \geq 0, x_{13} \geq 0, x_{21} \geq 0, x_{22} \geq 0, x_{23} \geq 0.$

Полученные выражения представляют собой математическую модель транспортной задачи для схемы, приведенной на рис. 3.1.

3.2. Получение допустимого решения

При решении транспортных задач удобно пользоваться табличной формой записи. В этом случае ограничения (3.2) и (3.2а) записывают в виде транспортной матрицы размерностью *nm*. Для рассмотренного выше *примера* 3 транспортная матрица представлена в виде табл. 3.1.

Т а б л и ц а 3.1

x_{11} z_{11}	x_{12} z_{12}	x_{13} z_{13}	A_1
x_{21} z_{21}	x_{22} z_{22}	x_{23} z_{23}	A_2
B_1	B_2	B_3	Z

Справа указаны заданные мощности источников A_1 и A_2, снизу - заданные мощности потребителей B_1, B_2 и B_3, справа внизу - значение целевой функции Z. Непосредственно в клетках транспортной матрицы записаны подлежащие определению искомые переменные x_{ij} и заданные значения удельных стоимостей передачи мощности z_{ij}.

Каждая i-я строка матрицы соответствует уравнению баланса мощности i-го источника питания, каждый j-й столбец - уравнению баланса мощности j-го потребителя.

Исходное допустимое решение может быть получено по алгоритму минимальной удельной стоимости:

1. В транспортной матрице выбирается клетка с минимальным значением z_{ij}. Если имеется несколько таких клеток, то выбирается любая из них.
2. В выбранную клетку в качестве *базисной* переменной заносится наименьшая из двух величин A_i или B_j, т.е. $x_{ij}=\min(A_i,B_j)$. При этом выполняется баланс мощности по строке i или столбцу j, в которые входит переменная x_{ij}.
3. В остальные клетки строки i или столбца j, для которых выполнен баланс мощности, заносятся нули, соответствующие свободным переменным. Большая из двух величин A_i и B_j условно заменяется разностью этих двух величин.
4. Из оставшихся незаполненных клеток транспортной матрицы вновь выбирается клетка с минимальным значением z_{ij}. Далее пункты 2 и 3 повторяются до полного заполнения всех клеток транспортной матрицы.

Следует напомнить, что общее количество переменных составляет nm. Количество отличных от нуля базисных переменных составляет $(n+m-1)$. Количество равных нулю свободных переменных составляет $(nm-(n+m-1))$.

Пример 4. Найти допустимое решение для задачи *примера* 3 при следующих исходных данных:

$A_1=50$, $A_2=30$, $B_1=20$, $B_2=25$, $B_3=35$ е.м.
$z_{11}=1,2$; $z_{12}=1,8$; $z_{13}=1,5$;
$z_{21}=1,6$; $z_{22}=2,3$; $z_{23}=2,1$ у.е./е.м.

Решение. Изобразим транспортную матрицу размерностью 2х3 (табл. 3.2) и будем заполнять ее в соответствии с алгоритмом минимальной удельной стоимости.

В транспортной матрице выбирается клетка с минимальным значением z_{ij}. Это клетка с переменной x_{11} и удельной стоимостью $z_{11}=1,2$.

Таблица 3.2

20 1,2	0 1,8	30 1,5	A_1=50
0 1,6	25 2,3	5 2,1	A_2=30
B_1=20	B_2=25	B_3=35	Z=137

В эту клетку в качестве базисной переменной заносим меньшее из двух значений мощностей $x_{11}=\min(A_1=50,\ B_1=20)=20$. Баланс для 1-го столбца (1-го потребителя) выполнен (20=20). В остальные клетки этого столбца заносим нули (свободная переменная $x_{21}=0$).

Поскольку от источника A_1 отобрано 20 е.м., отходящих к потребителю B_1, мощность этого источника условно заменяется величиной 50-20=30.

Из оставшихся незаполненных клеток транспортной матрицы выбирается клетка с наименьшей удельной стоимостью $z_{13}=1{,}5$. В качестве базисной переменной в эту клетку заносится меньшее из двух значений мощностей $x_{13}=\min(A_1=30,\ B_3=35)=30$. Баланс для 1-й строки (1-го источника) выполнен. В остальные клетки этой строки заносим нули (свободная переменная $x_{12}=0$).

Поскольку потребителю B_3 поставлено 30 е.м., мощность этого потребителя условно заменяется величиной 35-30=5.

Из оставшихся незаполненных клеток транспортной матрицы выбираем клетку с наименьшей удельной стоимостью $z_{23}=2{,}1$. В качестве базисной переменной в эту клетку заносим меньшее из двух значений мощностей $x_{23} = \min(A_2=30,\ B_3=5)=5$. Баланс для 3-го столбца (3-го потребителя) выполнен.

Поскольку от источника A_2 отобрано 5 е.м., отходящих к потребителю B_3, мощность этого источника условно заменяется величиной 30-5=25.

Последнее значение заносится в оставшуюся незаполненную клетку транспортной матрицы в качестве базисной переменной $x_{22}=25$.

Итак, вся транспортная матрица заполнена. Балансы мощности по строкам (по узлам источников) и по столбцам (по узлам потребителей) выполняются. Все переменные неотрицательны. Полученное исходное решение является *допустимым*. В этом решении

свободные переменные: $x_{12}=0$, $x_{21}=0$;

базисные переменные: $x_{11}=20$, $x_{13}=30$, $x_{22}=25$, $x_{23}=5$ е.м.;

значение целевой функции

$$Z = z_{11}x_{11}+z_{12}x_{12}+z_{13}x_{13}+z_{21}x_{21}+z_{22}x_{22}+z_{23}x_{23}=$$

$$= 1{,}2 \cdot 20 + 1{,}8 \cdot 0 + 1{,}5 \cdot 30 + 1{,}6 \cdot 0 + 2{,}3 \cdot 25 + 2{,}1 \cdot 5 = 137 \text{ у.е.}$$

показано справа внизу табл. 3.2.

Схема электрической сети, отвечающая полученному допустимому решению, показана на рис. 3.2.

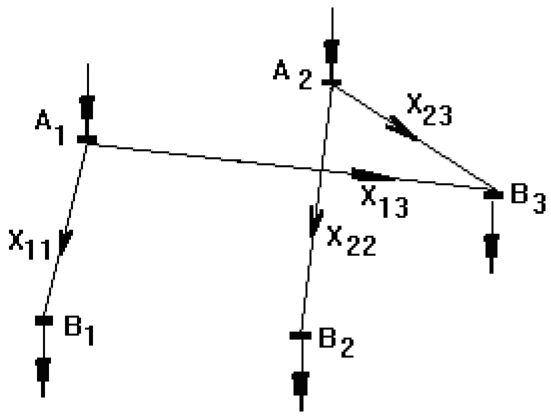


Рис. 3.2. Схема электрической сети, отвечающая допустимому решению

3.3. Распределительный метод

Как и в симплекс-методе, улучшать полученное допустимое решение будем за счет перевода одной из базисных переменных в разряд свободных и одной из свободных переменных в разряд базисных. Количество свободных и количество базисных переменных при этом не меняются.

Процесс улучшения допустимого решения рассмотрим как продолжение *примера* 4 (п. 3.2). В полученном допустимом решении имеются две свободные переменные x_{12} и x_{21}. Произвольно выберем переменную x_{21} и увеличим значение этой переменной от нуля до единицы x_{21}=1 (табл. 3.3.). При этом нарушаются балансы мощности по 1-му столбцу и 2-й строке.

Т а б л и ц а 3.3

– 19 1,2	0 1,8	+ 31 1,5	A_1=50
+ 1 1,6	25 2,3	– 4 2,1	A_2=30
B_1=20	B_2=25	B_3=35	Z=136,8

Для восстановления этих балансов уменьшим на единицу значения базисных переменных, входящих в 1-й столбец и 2-ю строку (x_{12}=19, x_{23}=4). При этом нарушаются балансы по 1-й строке и 3-му столбцу. Базисную переменную x_{13}, находящуюся на пересечении 1-й строки и 3-го столбца, увеличим на единицу (x_{13}=31). Балансы мощности по всем строкам и столбцам оказываются восстановленными.

В результате выполненных действий в транспортной матрице получен замкнутый цикл, вершины которого отмечены знаками "+" и "-". Начальная вершина цикла лежит в клетке свободной переменной x_{21}, которая переводится в базис. Все остальные вершины цикла лежат в клетках базисных переменных x_{11}, x_{13} и x_{23}. Знак "+" в вершине цикла соответствует увеличению переменной, знак "-" - ее уменьшению.

При увеличении на единицу свободной переменной изменение целевой функции определится как алгебраическая сумма удельных стоимостей, стоящих в вершинах цикла. Изменение целевой функции при увеличении на единицу свободной переменной x_{21} составит

$$\Delta Z = z_{21} - z_{11} + z_{13} - z_{23} = 1{,}6 - 1{,}2 + 1{,}5 - 2{,}1 = -0{,}2 < 0. \qquad (3.4)$$

Видно, что при увеличении свободной переменной x_{21} значение целевой функции уменьшается. Эту свободную переменную следует перевести в базис.

Совершенно аналогичные действия можно выполнить и для свободной переменной x_{12}. Несложно показать, что увеличение этой переменной на единицу даст увеличение целевой функции

$$\Delta Z = z_{12} - z_{13} + z_{23} - z_{22} = 1{,}8 - 1{,}5 + 2{,}1 - 2{,}3 = 0{,}1 > 0. \qquad (3.5)$$

Поэтому свободную переменную x_{12} не следует переводить в базис.

Итак, в базис переводится переменная x_{21}. В соответствии со знаками вершин цикла (табл. 3.3) при увеличении этой переменной в положительную сторону базисные переменные x_{11} и x_{23} будут уменьшаться, а базисная переменная x_{13} будет увеличиваться. Естественно, что первой достигнет нулевого значения и станет свободной переменная x_{23}, меньшая из базисных переменных в отрицательных вершинах цикла. Свободная переменная x_{21} примет значение переменной x_{23} и станет базисной. Базисные переменные x_{11} и x_{13} изменятся на величину переменной x_{23} в соответствии со знаками в вершинах цикла.

Получено новое допустимое решение (табл. 3.4 и рис. 3.3).

Таблица 3.4

15 1,2	0 1,8	35 1,5	A_1=50
5 1,6	25 2,3	0 2,1	A_2=30
B_1=20	B_2=25	B_3=35	Z=136

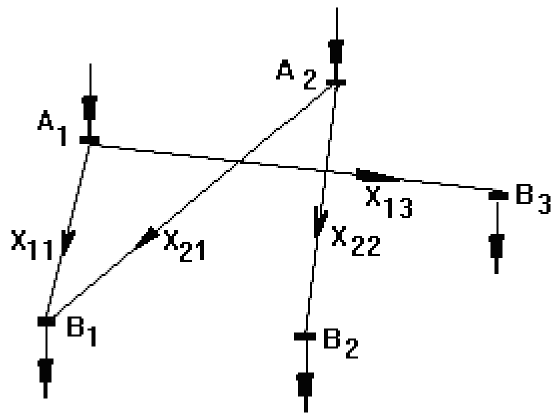


Рис. 3.3. Схема электрической сети

В этом новом решении

свободные переменные x_{12}=0, x_{23}=0;
базисные переменные x_{11}=15, x_{13}=35, x_{21}=5, x_{22}=25 е.м.;
значение целевой функции

$$Z = z_{11}x_{11}+z_{12}x_{12}+z_{13}x_{13}+z_{21}x_{21}+z_{22}x_{22}+z_{23}x_{23}=$$

$$= 1{,}2\cdot 15+1{,}8\cdot 0+1{,}5\cdot 35+1{,}6\cdot 5+2{,}3\cdot 25+2{,}1\cdot 0=136 \text{ у.е.}$$

Видно, что значение целевой функции улучшилось по сравнению с предыдущим решением (136<137).

В новом решении строятся циклы пересчета и определяются изменения целевой функции ΔZ для каждой свободной переменной x_{12} и x_{23}. Если для каждой свободной переменной изменение целевой функции ΔZ>0, то полученное решение будет оптимальным.

3.4. Метод потенциалов

Рассмотренный выше распределительный метод получения оптимального решения достаточно трудоемок. В каждом допустимом решении для каждой свободной переменной необходимо строить циклы и определять изменение целевой функции. Ниже рассмотрена модификация распределительного метода, получившая название *метода потенциалов* [2]. Этот метод рассмотрим как дальнейшее продолжение *примера* 4.

В соответствии с методом потенциалов каждой строке и каждому столбцу транспортной матрицы присваивается свой потенциал: строкам - потенциалы V_i (i=1, 2, ... n), столбцам - потенциалы U_j (j=1, 2, ... m), как показано в табл. 3.5 для рассматриваемого примера.

Т а б л и ц а 3.5

	U_1=1	U_2=1,7	U_3=1,3	
V_1=0,2	15 1,2	0 1,8	35 1,5	A_1=50
V_2=0,6	5 1,6	25 2,3	0 2,1	A_2=30
	B_1=20	B_2=25	B_3=35	Z=136

Эти потенциалы таковы, что для каждой базисной переменной сумма потенциалов равна удельной стоимости

$$V_i + U_j = z_{ij}, \tag{3.6}$$

Вернемся к соотношению (3.4), по которому вычислено изменение целевой функции при увеличении на единицу свободной переменной x_{21}, и заменим в этом соотношении потенциалами удельные стоимости базисных переменных

$$\Delta Z = z_{21} - z_{11} + z_{13} - z_{23} = z_{21} - V_1 - U_1 + V_1 + U_3 - V_2 - U_3 =$$
$$= z_{21} - V_2 - U_1 < 0.$$

Из последнего соотношения видно, что при условии

$$V_2 + U_1 > z_{21}$$

перевод свободной переменной x_{21} в базис уменьшит целевую функцию Z.

Аналогично в соотношении (3.5), по которому вычислено изменение целевой функции при увеличении на единицу свободной переменной x_{12}, заменим потенциалами удельные стоимости базисных переменных

$$\Delta Z = z_{12} - z_{13} + z_{23} - z_{22} = z_{12} - V_1 - U_3 + V_2 + U_3 - V_2 - U_2 =$$
$$= z_{12} - V_1 - U_2 > 0.$$

Из последнего соотношения видно, что при условии

$V_1+U_2<z_{12}$

перевод свободной переменной x_{12} в базис увеличивает целевую функцию Z.

В общем случае, при условии

$$V_i + U_j > z_{ij} \qquad (3.7)$$

перевод свободной переменной x_{ij} в базис уменьшает целевую функцию Z, а при условии

$$V_i + U_j < z_{ij} \qquad (3.8)$$

перевод свободной переменной x_{ij} в базис увеличивает целевую функцию Z.

Количество неизвестных потенциалов составляет $(n+m)$, а количество базисных переменных $(n+m-1)$. В системе уравнений (3.6) число неизвестных потенциалов на единицу больше числа уравнений. Следовательно, система (3.6) является неопределенной и имеет бесконечное количество решений.

Для получения одного из решений системы (3.6) произвольно зададимся величиной одного из потенциалов, например $U_1=1$. После этого все остальные потенциалы однозначно определятся по уравнениям (3.6).

В рассматриваемом случае имеем (табл. 3.5)

$U_1=1$;
$V_1= z_{11} - U_1 = 1{,}2 - 1 = 0{,}2$;
$V_2= z_{21} - U_1 = 1{,}6 - 1 = 0{,}6$;
$U_2= z_{22} - V_2 = 2{,}3 - 0{,}6 =1{,}7$;
$U_3= z_{13} - V_1 = 1{,}5 - 0{,}2 = 1{,}3$.

Проверим условия (3.7) и (3.8) для свободных переменных в транспортной матрице табл. 3.5. Для свободной переменной x_{23}

$$V_2+U_3 = 0{,}6+1{,}3=1{,}9 < z_{23} =2{,}1.$$

Следовательно, свободную переменную x_{23} переводить в базис не следует, поскольку этот перевод приведет к увеличению целевой функции Z.

Для свободной переменной x_{12}

$$V_1+U_2 = 0{,}2+1{,}7=1{,}9 > z_{12} =1{,}8.$$

Следовательно, свободную переменную x_{12} следует перевести в базис, поскольку этот перевод приведет к уменьшению целевой функции Z.

Для свободной переменной x_{12} строим цикл пересчета (табл. 3.6) и из отрицательных вершин цикла выбираем меньшую базисную переменную x_{11}=15. Эта переменная перейдет в разряд свободных x_{11}=0, а переменная x_{12} станет базисной x_{12}=15. В соответствии со знаками в вершинах цикла базисная переменная x_{21} увеличится на 15 единиц и станет равной x_{21}=5+15=20, а базисная переменная x_{22} уменьшится на 15 единиц и станет равной x_{22}=25-15=10.

Т а б л и ц а 3.6

	$U_1=1$	$U_2=1{,}7$	$U_3=1{,}3$	
$V_1=0{,}2$	– 15 1,2	+ 0 1,8	35 1,5	$A_1=50$
$V_2=0{,}6$	+ 5 1,6	– 25 2,3	0 2,1	$A_2=30$
	$B_1=20$	$B_2=25$	$B_3=35$	$Z=136$

Новому допустимому решению соответствует транспортная матрица табл. 3.7.

Т а б л и ц а 3.7

	$U_1=1$	$U_2=1{,}7$	$U_3=1{,}4$	
$V_1=0{,}1$	0 1,2	15 1,8	35 1,5	$A_1=50$
$V_2=0{,}6$	20 1,6	10 2,3	0 2,1	$A_2=30$
	$B_1=20$	$B_2=25$	$B_3=35$	$Z=134{,}5$

В этом решении свободные переменные x_{11}=0, x_{23}=0; базисные переменные x_{12}=15, x_{13}=35, x_{21}=20, x_{22}=10 е.м. Значение целевой функции

$$Z = z_{11}x_{11}+z_{12}x_{12}+z_{13}x_{13}+z_{21}x_{21}+z_{22}x_{22}+z_{23}x_{23}=$$
$$= 1{,}2\cdot 0+1{,}8\cdot 15+1{,}5\cdot 35+1{,}6\cdot 20+2{,}3\cdot 10+2{,}1\cdot 0=134{,}5 \text{ у.е.}$$

Проверим это решение на оптимальность. Произвольно зададимся значением одного из потенциалов U_1=1. В соответствии с уравнениями (3.6) остальные потенциалы будут равны

$V_2 = z_{21} - U_1 = 1{,}6 - 1 = 0{,}6;$
$U_2 = z_{22} - V_2 = 2{,}3 - 0{,}6 = 1{,}7;$

$V_1 = z_{12} - U_2 = 1,8 - 1,7 = 0,1;$
$U_3 = z_{13} - V_1 = 1,5 - 0,1 = 1,4.$

Для свободных переменных x_{11} и x_{23} сумму потенциалов сопоставим с удельной стоимостью

$V_1+U_1=0,1+1=1,1< z_{11}=1,2;$
$V_2+U_3= 0,6+1,4=2 < z_{23}=2,1.$

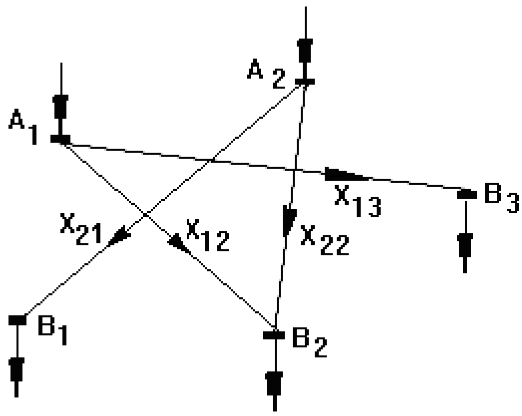


Рис. 3.4. Оптимальная схема электрической сети

В соответствии с условием (3.8) перевод любой из этих переменных в базис приведет к увеличению целевой функции Z. Следовательно, полученное решение является оптимальным. Схема электрической сети, отвечающая оптимальному решению, показана на рис. 3.4.

Алгоритм решения транспортной задачи.

1. В соответствии с исходными данными составляется транспортная матрица размерностью nm, где n - количество источников питания, m - количество потребителей.

2. Находится допустимое решение, например методом наименьшей удельной стоимости.

3. Для допустимого решения каждой i-й строке и каждому j-му столбцу транспортной матрицы присваивается значение потенциала V_i и U_j (i=1,2,...n; j=1,2,...m). Для каждой базисной переменной сумма потенциалов равна удельной стоимости $V_i+U_j=z_{ij}$.

4. Произвольно задавшись значением одного из потенциалов, по уравнениям $V_i+U_j=z_{ij}$, справедливым для базисных переменных, вычисляются значения остальных потенциалов.

5. Для всех свободных переменных проверяется соотношение суммы потенциалов с удельной стоимостью. Если для всех

свободных переменных $V_i+U_j<z_{ij}$, то полученное решение является оптимальным.

6. Если имеются свободные переменные, для которых $V_i+U_j>z_{ij}$, то выбирается любая из этих свободных переменных и переводится в базис. Для этого строится цикл пересчета (замкнутая ломаная линия), начальная вершина которого лежит в клетке выбранной свободной переменной. Остальные вершины цикла лежат в клетках, соответствующих базисным переменным. Начальной вершине цикла присваивается знак "+", соответствующий увеличению переменной. Далее знаки вершин цикла чередуются. Знаки "+" соответствуют увеличению базисных переменных, знаки "-" – их уменьшению.

7. Из отрицательных вершин цикла выбирается вершина с наименьшим значением базисной переменной и на эту величину изменяются все переменные, лежащие в вершинах цикла. В положительных вершинах переменные увеличиваются, в отрицательных - уменьшаются. При этом выбранная свободная переменная становится базисной, а наименьшая по величине базисная переменная в отрицательной вершине цикла становится свободной (равной нулю).

8. Для вновь полученного решения вычислительная процедура повторяется, начиная с пункта 3.

3.5. Учет пропускной способности линий

При проектировании систем электроснабжения часто сталкиваются с задачей ограничения пропускной способности линии. В частности, ограничение передаваемой мощности по существующей линии обусловлено допустимым нагревом ее проводов.

Пусть для линии x_{ij} между источником i и потребителем j передаваемая мощность ограничена величиной S $(x_{ij} \leq S)$. Ограничение пропускной способности линии учитывается в транспортной задаче следующим образом.

1. Столбец j транспортной матрицы, отвечающий потребителю с мощностью B_j, разбивается на два столбца или на два условных потребителя с мощностями $B_j'=B_j-S$ и $B_j''=S$.

2. Для переменной между источником i и потребителем B_j' осуществляется блокировка передачи мощности, т.е. для этой переменной принимается очень большой показатель удельной стоимости.

Далее решение транспортной задачи ничем не отличается от решения задачи без ограничения пропускной способности линий. Следует только отметить, что для всех допустимых решений, в том числе и для оптимального решения, мощность, передаваемая от источника i к потребителю B_j, не превысит величины S.

Пример 5. Решить задачу рассмотренного выше *примера* 4 для случая, когда мощность, передаваемая по линии x_{13}, ограничена величиной 20 е.м. ($x_{13} \leq 20$).

Решение. В исходной транспортной матрице (табл. 3.2) третий столбец разбиваем на два столбца с условными потребителями B_3'=35-20=15 и B_3''=20 е.м. Удельную стоимость передачи мощности от источника A_1 к условному потребителю B_3' примем равной 100 у.е./е.м. Остальные удельные стоимости такие же, как в табл. 3.2.

Исходное допустимое решение получено методом наименьшей удельной стоимости и представлено в табл. 3.8.

В этом решении свободные переменные $x_{13}'=x_{21}=x_{23}''=0$; базисные переменные $x_{11}=20$, $x_{12}=10$, $x_{13}''=20$, $x_{22}=15$, $x_{23}''=15$ е.м. Значение целевой функции

$$Z = z_{11}x_{11}+z_{12}x_{12}+z_{13}'x_{13}'+z_{13}''x_{13}''+z_{21}x_{21}+z_{22}x_{22}+z_{23}'x_{23}'+z_{23}''x_{23}''=$$
$$=1{,}2\cdot20+1{,}8\cdot10+100\cdot0+1{,}5\cdot20+1{,}6\cdot0+2{,}3\cdot15+2{,}1\cdot15+2{,}1\cdot0=138 \text{ у.е.}$$

Т а б л и ц а 3.8

	$U_1=1$	$U_2=1{,}6$	$U_3'=1{,}4$	$U_3''=1{,}3$	
$V_1=0{,}2$	_ 20 1,2	+ 10 1,8	0 100	20 1,5	$A_1=50$
$V_2=0{,}7$	+ 0 1,6	_ 15 2,3	15 2,1	0 2,1	$A_2=30$
	В$_1$=20	$B_2=25$	$B_3'=15$	$B_3''=20$	$Z=138$

Далее используем метод потенциалов. Для принятого произвольно значения одного из потенциалов (U_l=1) величины остальных потенциалов определены по выражению $V_i+U_j=z_{ij}$, справедливому для базисных переменных (табл. 3.8).

Поскольку для свободной переменной x_{21}

$V_2+U_1=1{,}7>z_{21}=1{,}6$.

переводим эту переменную в базис. Цикл пересчета переменных отмечен в табл. 3.8. знаками "+" и "-". В разряд свободных перейдет базисная переменная x_{22}. Новое допустимое решение показано в табл. 3.9.

Таблица 3.9

	U_1=1	U_2=1,6	U_3'=1,5	U_3''=1,3	
V_1=0,2	5 1,2	25 1,8	0 100	20 1,5	A_1=50
V_2=0,6	15 1,6	0 2,3	15 2,1	0 2,1	A_2=30
	B_1=20	B_2=25	B_3'=15	B_3''=20	Z=136,5

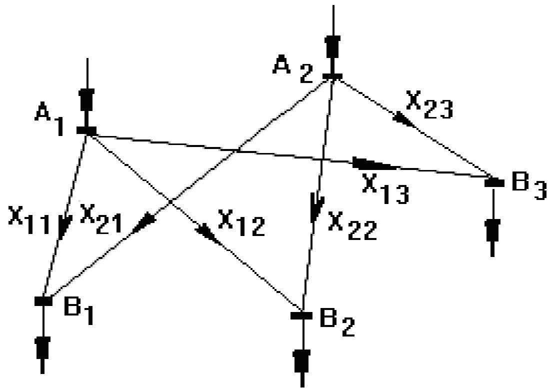


Рис. 3.5. Оптимальная схема электрической сети

Это решение является оптимальным, поскольку для всех свободных переменных выполняется условие (3.8)

$$V_i+U_j<z_{ij},$$

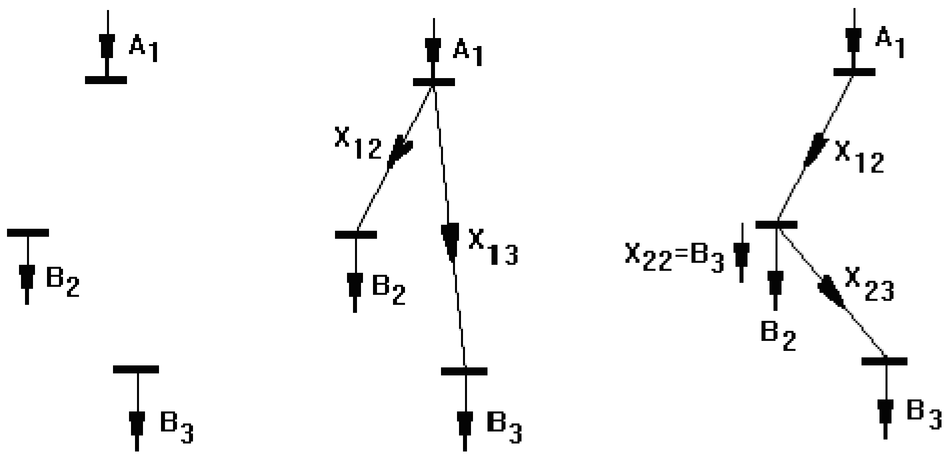
при котором перевод любой свободной переменной в базис приведет к увеличению целевой функции Z. Схема, отвечающая оптимальному решению, приведена на рис. 3.5.

Следует отметить, что при решении транспортных задач с ограничениями пропускной способности линий в схеме электрической сети возможно появление замкнутых контуров, а количество базисных переменных больше, чем в транспортной задаче без указанных ограничений.

3.6. Транспортная задача с транзитом мощности

В рассмотренных выше транспортных задачах передача мощностей осуществлялась непосредственно от источников к потребителям. Это транспортные задачи в так называемой классической постановке.

В реальных схемах электрических сетей часто оказывается целесообразной передача мощности через промежуточные (транзитные) узлы. Такими транзитными узлами могут быть как узлы источников питания, так и узлы потребителей. На рис. 3.6 в качестве примера приведены простейшие схемы электрических сетей, поясняющие понятие "транзит мощности".



а) б) в)

Рис. 3.6. Поясняющие схемы к понятию "транзит мощности"

На рис.3.6,а показано взаимное расположение узлов источника A_1 и потребителей B_2 и B_3. При классической постановке транспортной задачи оптимальная схема электрической сети будет иметь вид, показанный на рис. 3.6,б. Очень возможно, что эта схема будет дороже, чем схема, приведенная на рис. 3.6,в, в которой мощность к потребителю B_3 передается через промежуточный (транзитный) узел потребителя B_2. Величина транзитной мощности, передаваемой через узел B_2, равна мощности потребителя B_3, т.е. $x_{22}=B_3$.

Транзитная мощность обозначена переменной с двумя одинаковыми индексами, соответствующими номеру узла, через который она протекает. Можно показать, что транзитным узлом может быть и узел источника питания.

Таким образом, транспортная задача с транзитом мощности является более общей задачей и имеет более широкие возможности по оптимизации схемы электрической сети, чем транспортная задача в классической постановке.

При решении транспортных задач с транзитом мощности с количеством источников n и количеством потребителей m всем узлам схемы присваивается единая нумерация 1, 2, ... (n+m).

Целевая функция представляет собой сумму произведений удельных стоимостей на величины передаваемых мощностей от узла i к узлу j

$$Z = \sum_{i=1}^{n+m} \sum_{j=1}^{n+m} z_{ij} x_{ij} \rightarrow \min, \quad i \neq j. \qquad (3.9)$$

Стоимость передачи мощности между узлами i и j не зависит от направления этой мощности, поэтому в рассматриваемой задаче принимается $z_{ij}=z_{ji}$.

Для оценки удельных затрат z_{ii} на передачу через i-й узел транзитной мощности x_{ii} обратимся к рис. 3.6, в. Затраты на электрическую сеть, показанную на этом рисунке, составляют $Z= z_{12}x_{12}+z_{23}x_{23}$. Транзитная мощность x_{22} и удельные затраты z_{22} на ее передачу через узел 2 не входят в выражение целевой функции Z. Следовательно, удельные затраты на передачу транзитной мощности через любой i-й узел z_{ii}=0.

Как и в классической транспортной задаче, ограничениями в транспортной задаче с транзитом будут балансы мощности во всех узлах. В частности, для узла B_2 схемы рис. 3.6, в баланс мощности запишется в виде $x_{12} = B_2 + x_{22}$ или $x_{12} - x_{22} = B_2$.

В общем случае для любого j-го потребителя сумма мощностей, притекающих от всех других узлов, за вычетом транзитной мощности x_{jj} равна мощности этого потребителя

$$\sum_{i=1,\, i \neq j}^{n+m} x_{ij} - x_{jj} = B_j. \qquad (3.10)$$

Аналогично можно записать уравнение баланса мощности для любого i-го источника. Сумма мощностей, оттекающих от i-го источника ко всем другим узлам, за вычетом транзитной мощности x_{ii} равна мощности этого источника

$$\sum_{j=1,\, i \neq j}^{n+m} x_{ij} - x_{ii} = A_i. \qquad (3.11)$$

Из двух последних выражений видно, что транзитная мощность входит в математическую модель транспортной задачи со знаком минус.

Для решения транспортной задачи с транзитом мощности составляется транспортная матрица. Алгоритм решения транспортной задачи с транзитом мощности практически не отличается от алгоритма решения классической транспортной задачи. Отметим отличительные особенности транспортной задачи с транзитом мощности, часть из которых уже упоминалась выше:

1. Всем n узлам источников и m узлам потребителей присваивается сквозная нумерация 1, 2, ... $(n+m)$.

2. Считается, что через любой i-й узел может передаваться транзитная (промежуточная) мощность x_{ii}.

3. Удельные стоимости передачи транзитной мощности z_{ii}=0.

4. Транспортная матрица является квадратной и имеет размерность $(n+m)(n+m)$.

5. Транзитные переменные x_{ii} входят в решение задачи (в транспортную матрицу) со знаком минус.

6. Вне зависимости от значения все транзитные переменные считаются базисными.

Пример 6. В проектируемой системе электроснабжения имеется 2 узла источников питания и 2 узла потребителей. Мощности источников составляют A_1=100 и A_2=50, а мощности потребителей - B_3=90 и B_4=60 е.м. Удельные затраты на передачу мощностей по линиям между узлами составляют z_{12}=10, z_{13}=5, z_{14}=2, z_{23}=4, z_{24}=3 и z_{34}=2 у.е./е.м.

Требуется найти оптимальную схему электрической сети.

Решение. В соответствии с условиями задачи принята следующая сквозная нумерация узлов A_1, A_2, B_3 и B_4. Составим транспортную матрицу. Эта матрица будет квадратной размерностью 4х4 (табл. 3.10).

Т а б л и ц а 3.10

	U_1=1	U_2=2	U_3=6	U_4=3	
V_1=-1	0 0	0 10	– 40 5	+ 60 2	A_1=100
V_2=-2	0 10	0 0	50 4	0 3	A_2=50
V_3=-6	0 5	0 4	0 0	0 2	B_3=0
V_4=-3	0 2	0 3	+ 0 2	– 0 0	B_4=0
	A_1=0	A_2=0	B_3=90	B_4=60	Z=520

Справа от матрицы, где помещены мощности источников питания, указаны нулевые мощности узлов 3 и 4 (B_3=0, B_4=0), поскольку эти узлы не являются источниками. Снизу под матрицей, где помещены мощности потребителей, указаны нулевые мощности узлов 1 и 2 (A_1=0, A_2=0), поскольку эти узлы не являются потребителями.

Исходное допустимое решение найдено методом наименьшей удельной стоимости. В полученном допустимом решении

свободные переменные $x_{12} = x_{21} = x_{24} = x_{31} = x_{32} = x_{34} = x_{41} = x_{42} = x_{43} = 0$;

базисные переменные $x_{11} = x_{22} = x_{33} = x_{44} = 0$, x_{13}=40, x_{14}=60, x_{23}=50 е.м.;

значение целевой функции $Z= z_{13}x_{13}+ z_{14}x_{14}+ z_{23}x_{23} =$

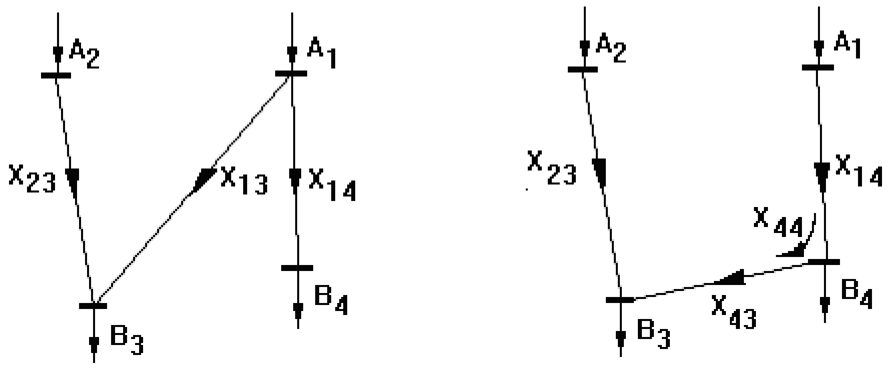
$= 5{\cdot}40 + 2{\cdot}60 + 4{\cdot}50 = 520$ у.е.

Присвоим каждой строке потенциал V_i, а каждому столбцу - потенциал U_j. В соответствии с методом потенциалов для всех базисных переменных сумма потенциалов равна удельной стоимости

$$V_i+U_j=z_{ij}.$$

Зададимся произвольно значением одного из потенциалов (U_1=1). Вычисленные значения остальных потенциалов показаны в табл. 3.10. Поскольку для базисных транзитных переменных удельные стоимости z_{ii} = 0, потенциалы с одинаковыми индексами равны по величине и противоположны по знаку $V_i= -U_i$.

Полученному исходному допустимому решению отвечает схема электрической сети, приведенная на рис. 3.7,а. Попробуем улучшить полученное решение.



а)   б)

Рис. 3.7. Исходная (а) и оптимальная (б) схемы электрической сети

Для всех свободных переменных проверим соотношение суммы потенциалов с удельной стоимостью. Для свободной переменной x_{34}

$V_3+U_4 = 6 - 3 = 3 > z_{34} = 2.$

Следовательно, свободную переменную x_{34} следует перевести в базис. Для этой переменной строим цикл (табл. 3.10). Начальная вершина цикла лежит в клетке свободной переменной x_{34}. Остальные вершины цикла лежат в клетках, соответствующих базисным переменным x_{13}, x_{14} и x_{44}. Начальной вершине присваиваем знак "+", далее знаки вершин цикла чередуются.

При увеличении свободной переменной x_{43} базисная переменная x_{14} будет увеличиваться, а базисные переменные x_{13} и x_{44} будут уменьшаться. Поскольку транзитная базисная переменная x_{44} входит в решение задачи со знаком "минус", ее изменение в отрицательную сторону не ограничено. Уменьшение базисной переменной x_{13}=40 ограничено нулевым значением. Поэтому значения всех переменных в вершинах цикла следует изменить на 40 е.м.

В новом допустимом решении (табл. 3.11)

свободные переменные $x_{12} = x_{13} = x_{21} = x_{24} = x_{31}=x_{32} = x_{34} = x_{41} = x_{42} = 0$;

базисные переменные $x_{11} = x_{22} = x_{33} = 0$, $x_{44}= -40$, $x_{14}=100$, $x_{23}=50$, $x_{43}=40$ е.м.;

значение целевой функции $Z= z_{14}\, x_{14} + z_{23}x_{23} + z_{43}\, x_{43}=$
$= 2{\cdot}100 + 4{\cdot}50 + 2{\cdot}40 = 480$ у.е.

Т а б л и ц а 3.11

	U_1=1	U_2=1	U_3=5	U_4=3	
V_1=-1	0 0	0 10	0 5	100 2	A_1=100
V_2=-1	0 10	0 0	50 4	0 3	A_2=50
V_3=-5	0 5	0 4	0 0	0 2	B_3=0
V_4=-3	0 2	0 3	40 2	-40 0	B_4=0
	A_1=0	A_2=0	B_3=90	B_4=60	Z=480

В этом решении для всех свободных переменных выполняется условие (3.8)

$$V_i+U_j < z_{ij}.$$

Следовательно, перевод любой свободной переменной в базис не улучшит решения. Полученное решение является оптимальным. Оптимальная схема электрической сети показана на рис. 3.7,б.

4. Нелинейные оптимизационные задачи

4.1. Общие положения

Общая задача оптимизации заключается в отыскании экстремума целевой функции

$$Z(x_1, x_2, \ldots x_n) \to \text{extr} \qquad (4.1)$$

n переменных, при m ограничениях, заданных в форме равенств и (или) неравенств

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \ldots x_n) = b_1, \\ &f_2(x_1, x_2, \ldots x_n) \geq b_2, \qquad (4.2) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

$f_m(x_1, x_2, \ldots x_n) \le b_m$,

и граничных условиях, задающих диапазон изменения переменных

$$d_i \le x_i \le D_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots n. \qquad (4.3)$$

Если в математической модели оптимизационной задачи имеются нелинейные зависимости, для решения этой задачи используются методы нелинейного программирования.

Большинство реальных оптимизационных задач являются нелинейными.

Как отмечалось в п. 1.2. нелинейная целевая функция может иметь один или несколько экстремумов. Существующие методы нелинейного программирования позволяют найти один экстремум целевой функции и не дают ответа на вопрос: является ли этот экстремум локальным или глобальным?

Поэтому при многоэкстремальной целевой функции диапазон изменения переменных (4.3) разбивается на ряд более узких диапазонов, например

$$d_i \le x_i \le a_i, \quad a_i \le x_i \le b_i, \quad b_i \le x_i \le D_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots n, \qquad (4.4)$$

в каждом из которых ищется локальный экстремум целевой функции. Из полученных локальных экстремумов выбирается глобальный экстремум.

Для случая (4.4) оптимизационная задача решается трижды: в диапазоне изменения переменных $d_i \le x_i \le a_i$, в диапазоне $a_i \le x_i \le b_i$ и в диапазоне $b_i \le x_i \le D_i$. В результате получаем три локальных экстремума. Из трех локальных экстремумов выбирается глобальный экстремум.

Наиболее простыми задачами нелинейного программирования являются задачи *безусловной оптимизации*. В этих задачах ищется абсолютный экстремум целевой функции без ограничений и граничных условий.

Из курса высшей математики известно, что в точке экстремума (минимума, максимума) нелинейной функции все ее частные производные равны нулю. Следовательно, для нахождения экстремума нелинейной функции n переменных необходимо определить ее частные производные по всем переменным и приравнять их к нулю. Решение полученной системы n уравнений с n неизвестными даст значения переменных, при которых достигается экстремум функции.

Следует отметить, что точное решение системы уравнений, в общем случае системы нелинейных уравнений, представляет собой достаточно сложную задачу. Поэтому для отыскания экстремума нелинейной функции часто используются другие методы, в частности градиентные методы.

Задачи безусловной минимизации на практике встречаются редко, однако методы их решения являются основой решения большинства практических задач *условной оптимизации*. В этих задачах ищется условный экстремум целевой функции, т.е. экстремум функции при наличии ограничений и граничных условий.

В большинстве практических оптимизационных задач искомые переменные принимают только положительные или нулевые значения. В этом случае граничные условия имеют вид

$$x_i \geq 0, \quad i = 0, 1, 2, \ldots n. \qquad (4.5)$$

Ниже будут рассматриваться задачи безусловной и условной оптимизации, в которых ищется один экстремум целевой функции при граничных условиях вида (4.5).

4.2. Графическая иллюстрация задачи нелинейного программирования

Графическую иллюстрацию нелинейной оптимизационной задачи рассмотрим для случая двух переменных x_1 и x_2. Пусть нелинейная целевая функция

$$Z(x_1, x_2) \qquad (4.6)$$

имеет вид, показанный на рис. 4.1.

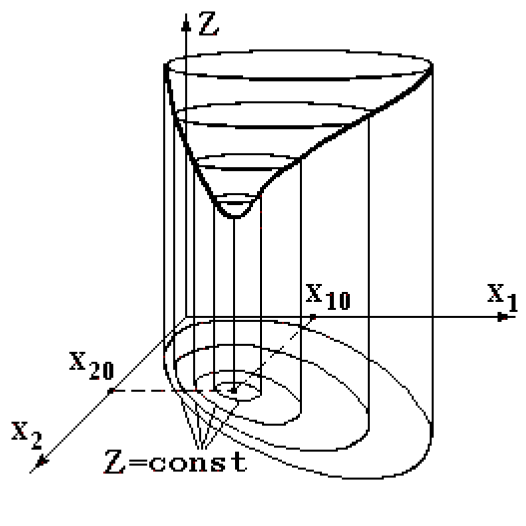


Рис. 4.1. Нелинейная целевая функция $Z(x_1, x_2)$ и ее представление линиями равного уровня $Z = \text{const}$

Пересечем функцию Z плоскостями, параллельными горизонтальной плоскости x_1,x_2. Точки пересечения спроектируем на плоскость x_1,x_2. На плоскости x_1,x_2 получим замкнутые концентрические кривые. На каждой из этих замкнутых кривых значение целевой функции неизменно

$$Z = \text{const}. \tag{4.7}$$

Полученные замкнутые кривые Z = const называются *линиями равного уровня* целевой функции Z. Напомним, что для линейной задачи линии равного уровня Z=const представляли собой прямые линии (рис. 2.2).

Таким образом, нелинейную функцию двух переменных $Z(x_1, x_2)$ можно представить в двумерной плоскости x_1,x_2 линиями равного уровня Z=const. Эти концентрические линии стягиваются в точку с координатами x_{10} и x_{20}, являющуюся минимумом целевой функции Z.

Ограничения (4.2) могут быть линейными и нелинейными, заданными в виде неравенств или равенств. Как было показано при рассмотрении задач линейного программирования, линейные ограничения представляют собой прямые линии. Очевидно, что нелинейные ограничения будут представлять собой кривые линии. При ограничениях-равенствах допустимые значения переменных принадлежат прямой (кривой) линии, при ограничениях-неравенствах допустимые значения переменных принадлежат полупространству, расположенному по одну сторону от прямой (кривой) линии.

На рис. 4.2 показан случай, когда два ограничения 1 и 2 являются линейными неравенствами, а одно ограничение 3 - нелинейным неравенством. Штриховка у каждого ограничения направлена в сторону допустимых значений переменных.

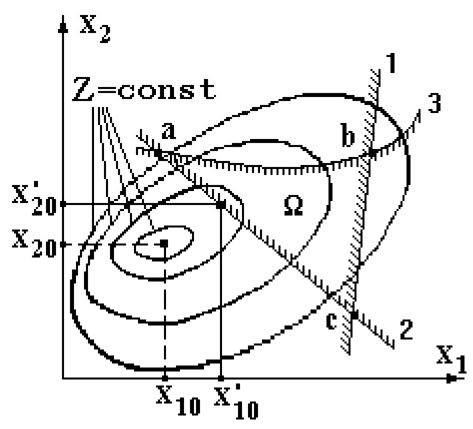


Рис. 4.2. Иллюстрация области Ω допустимых значений переменных и относительного минимума функции Z

Как и в случае линейной задачи, система ограничений (4.2) образует в пространстве переменных x_1 и x_2 область Ω допустимых значений переменных. В общем случае эта область представляет собой замкнутый многогранник (многогранник *abc* на рис. 4.2) с прямолинейными и криволинейными гранями.

При рассмотрении линейной задачи было показано, что оптимальное решение всегда лежит в одной из вершин многогранника Ω. Для нелинейной оптимизационной задачи это условие может не выполняться. Оптимальное решение может лежать на одной из граней области Ω или внутри этой области.

Для случая, приведенного на рис. 4.2, оптимальному решению соответствует точка с координатами x_{10}' и x_{20}', лежащая на грани *ac* области Ω. Эта точка представляет собой относительный минимум функции Z, т.е. минимум функции Z при наличии ограничений.

4.3. Градиентные методы

Как следует из названия, эти методы решения нелинейных оптимизационных задач используют понятие *градиента функции*. Градиентом функции $Z(x_1, x_2, \dots x_n)$ называется вектор

$$\text{grad}Z = \frac{\partial Z}{\partial x_1}\bar{i} + \frac{\partial Z}{\partial x_2}\bar{j} + \dots + \frac{\partial Z}{\partial x_n}\bar{k}, \qquad (4.8а)$$

где $\bar{i}, \bar{j}, \dots \bar{k}$ - единичные вектора (орты).

Величина этого вектора определяется по выражению

$$|\,\text{grad}\,Z| = \sqrt{(\partial Z/\partial x_1)^2 + (\partial Z/\partial x_2)^2 + \dots + (\partial Z/\partial x_n)^2}\,. \qquad (4.8)$$

Из (4.8) и (4.8а) видно, что функция, градиент которой определяется, должна быть дифференцируемой по всем n переменным.

Физический смысл градиента функции в том, что он показывает направление (4.8а) и скорость (4.8) наибольшего изменения функции в рассматриваемой точке. Если в некоторой точке |grad Z| = 0, функция в этой точке не изменяется (не возрастает и не убывает). Эта точка соответствует экстремуму функции.

Сущность градиентных методов решения нелинейных оптимизационных задач поясним для случая отыскания абсолютного минимума функции двух переменных $Z(x_1,x_2)$, иллюстрируемого рис. 4.3. Этот минимум находится в точке с координатами x_{10} и x_{20}.

В соответствии с граничными условиями (4.5) областью Ω допустимых значений переменных будет первый квадрант системы координат x_1 и x_2. В этой области произвольно выберем исходное (нулевое) приближение - точку с координатами x_1^0, x_2^0. Значение целевой функции в этой точке составляет Z^0. В соответствии с выражением (4.8) вычислим в этой точке величину градиента функции Z.

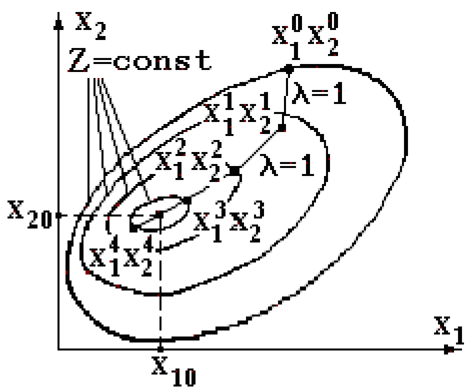


Рис. 4.3. Иллюстрация градиентного метода с постоянным шагом λ=1

Выполним шаг единичной длины (λ=1) в направлении убывания функции Z. В результате выполненного шага получим первое приближение - точку с координатами x_1^1, x_2^1. Значение целевой функции в этой точке составляет Z^1.

Далее вычислительная процедура повторяется: последовательно получаем 2-е, 3-е и 4-е приближения - точки с координатами x_1^2, x_2^2; x_1^3, x_2^3 и x_1^4, x_2^4. Значения целевой функции в этих точках соответственно составляют Z^2, Z^3 и Z^4.

Из рис. 4.3 видно, что в результате вычислительного процесса последовательно осуществляется "спуск" к минимуму функции Z. Вычислительная процедура заканчивается, когда относительное изменение целевой функции на предыдущем i-м и последующем (i+1)-м шагах оказывается меньше заданной точности вычислений ε:

$$(Z_i - Z_{i+1})/Z_i \leq \varepsilon. \qquad (4.9)$$

Рассмотренная вычислительная процедура носит название *градиентного метода с постоянным шагом*. В этом методе все шаги выполнялись одинаковой длины λ=1. Метод достаточно прост. Основной его недостаток - большая вероятность зацикливания вычислительного процесса в окрестности минимума функции *Z*. В соответствии с рис. 4.3 вычислительный процесс зациклится между точками с координатами x_1^3, x_2^3 и x_1^4, x_2^4. При этом в качестве искомого решения следует принять одну из этих точек.

Для получения более точного результата необходимо выбрать шаг меньшей длины. При этом объем вычислений (количество шагов) увеличится.

Таким образом, точность и объем вычислений в градиентном методе с постоянным шагом определяются величиной этого шага.

Метод покоординатного спуска. Как и в предыдущем методе, выберем исходное (нулевое) приближение - точку с координатами x_1^0, x_2^0 (рис. 4.4). Значение целевой функции в этой точке составляет Z^0. В соответствии с выражением (4.8) вычислим частные производные целевой функции *Z*. Из совокупности частных производных выберем наибольшую по модулю производную. Пусть это будет производная $\partial Z/\partial x_2$. Следовательно, в направлении переменной x_2 функция *Z* имеет наибольшее изменение. Если производная положительная, при увеличении переменной x_2 функция увеличивается. Если производная отрицательная, при увеличении переменной x_2 функция уменьшается.

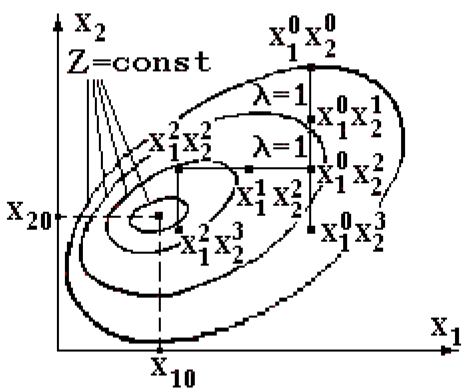


Рис. 4.4. Иллюстрация метода покоординатного "спуска"

Осуществляем "спуск" по переменной x_2 в направлении уменьшения целевой функции (выполняем единичные шаги λ=1). Последовательно получаем 1-е, 2-е, 3-е приближения - точки с координатами x_1^0,x_2^1; x_1^0,x_2^2; x_1^0,x_2^3. На каждом шаге вычисляем значение целевой функции: Z^1, Z^2, Z^3. Пусть $Z^0>Z^1>Z^2<Z^3$.

Следовательно, 3-й шаг в направлении переменной x_2 выполнять нецелесообразно, целевая функция начинает увеличиваться. Осуществляется возврат в предыдущую точку с координатами x_1^0, x_2^2.

Из точки с координатами x_1^0, x_2^2 продолжаем "спуск" в направлении другой переменной x_1. Единичные шаги (λ=1) в направлении переменной x_1 выполняются до тех пор, пока целевая функция не начнет увеличиваться. Получаем точки с координатами x_1^1, x_2^2; x_1^2, x_2^2.

Вычислительная процедура повторяется до достижения точности, соответствующей выбранному шагу. Если в некоторой точке, например с координатами x_1^2, x_2^3, единичный шаг по любой переменной приводит к увеличению целевой функции, процесс заканчивается. Точка с координатами x_1^2, x_2^3 находится в окрестности минимума целевой функции Z.

Метод скорейшего спуска. Как было отмечено выше, точность и объем вычислений в градиентных методах с постоянным шагом λ определяются величиной этого шага. При увеличении длины шага объем вычислений (количество шагов) уменьшается, однако уменьшается и точность определения минимума целевой функции. При уменьшении длины шага точность увеличивается, однако объем вычислений (количество шагов) возрастает.

Поэтому вопрос о выборе рациональной длины шага в градиентных методах является своего рода оптимизационной задачей.

Один из способов определения оптимальной длины шага $\lambda_{опт}$ иллюстрируется на рис. 4.5 и носит название метода скорейшего "спуска".

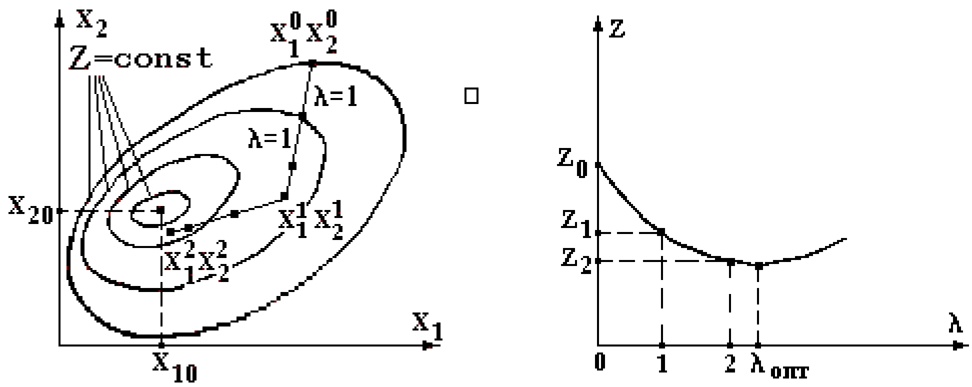


Рис. 4.5. Иллюстрация метода скорейшего "спуска" (а) и параболическая аппроксимация целевой функции для выбора оптимального шага (б)

Начало вычислительной процедуры такое же, как и в градиентном методе с постоянным шагом:

принимается исходное (нулевое) приближение x_1^0, x_2^0;

вычисляется значение целевой функции в этой точке Z^0;

в соответствии с выражением (4.8) для этой точки вычисляется grad Z.

Из исходной точки в направлении убывания целевой функции выполним два единичных шага (λ=1). В конце каждого шага вычислим значения целевой функции Z^1 и Z^2.

Итак, имеем три значения целевой функции Z^0, Z^1 и Z^2, отвечающие нулевой (λ=0), единичной (λ=1) и двойной (λ=2) длинам шага (рис. 4.5,б). Эти три значения характеризуют сечение целевой функции Z в выбранном направлении "спуска".

Известно, что через три точки можно провести единственную параболу

$$Z = a\lambda^2 + b\lambda + c, \tag{4.10}$$

где a, b, c - постоянные коэффициенты.

Определим координату минимума этой параболы, для чего приравняем к нулю первую производную функции (4.10) по переменной λ

$$dZ/d\lambda = 2a\lambda + b = 0, \tag{4.11}$$

откуда $\lambda = -b/2a$.

Полученное значение и будем считать оптимальной длиной шага $\lambda_{опт}$.

Выполненная процедура называется параболической аппроксимацией сечения целевой функции Z. Заметим, что для аппроксимации сечения целевой функции Z могут использоваться и другие стандартные кривые, например гипербола.

Итак, из исходной точки x_1^0, x_2^0 (рис. 4.5,а) следует выполнить шаг длиной $\lambda_{опт}$. В результате получается первое приближение - точка с координатами x_1^1, x_2^1. Вычисляется значение целевой функции в этой точке Z^1.

Из точки с координатами x_1^1, x_2^1 вычислительная процедура повторяется. Получаем следующее приближение - точку с координатами x_1^2, x_2^2 и значением целевой функции Z^2. Процесс продолжается до достижения требуемой точности в соответствии с соотношением (4.9).

В методе скорейшего спуска, по сравнению с градиентным методом с постоянным шагом, количество шагов меньше, точность получаемого результата выше, отсутствует зацикливание вычислительного процесса, однако объем вычислений на одном шаге больше.

Метод проектирования градиента. Рассмотренные выше градиентные методы предполагали отыскание абсолютного минимума целевой функции Z. При наличии в математической модели ограничений (4.2) ищется уже не абсолютный, а относительный минимум целевой функции Z.

Рассмотрим один из методов отыскания относительного минимума целевой функции, получивший название метода проектирования градиента. Для упрощения алгоритма метода допустим, что имеется одно ограничение в виде линейного неравенства

$$ax_1 + bx_2 + c \geq 0. \qquad (4.12)$$

При наличии указанного ограничения минимум целевой функции следует искать в области Ω, расположенной по одну сторону от прямой $ax_1 + bx_2 + c = 0$, например выше этой прямой (рис. 4.6).

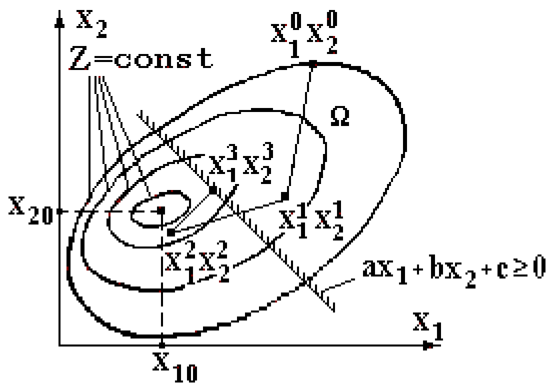


Рис. 4.6. Иллюстрация метода проектирования градиента

Начало вычислительной процедуры такое же, как и в предыдущих методах:

в области Ω принимается исходное (нулевое) приближение x_1^0, x_2^0;

вычисляется значение целевой функции в этой точке Z^0;

в соответствии с выражением (4.8) в этой точке вычисляется градиент целевой функции grad Z;

из исходной точки в направлении убывания целевой функции выполняется шаг.

Выбор величины шага может осуществляться различным образом. Выберем шаг в соответствии с алгоритмом метода скорейшего "спуска" и получим первое приближение - точку с координатами x_1^1, x_2^1. Вычисляется значение целевой функции в этой точке Z^1.

Необходимо проверить, принадлежит ли точка с координатами x_1^1, x_2^1 области Ω допустимых значений переменных. Для этого проверяется неравенство (4.12), в которое подставляются координаты x_1^1, x_2^1:

$$ax_1^1 + bx_2^1 + c \geq 0. \tag{4.13}$$

Если это неравенство выполняется, вычислительный процесс продолжается.

Из точки с координатами x_1^1, x_2^1 выполняется следующий шаг. В результате этого шага имеем второе приближение - точку с координатами x_1^2,x_2^2. Значение целевой функции в этой точке Z^2.

Пусть для этой точки неравенство

$$ax_1^2 + bx_2^2 + c \geq 0$$

не выполняется. Следовательно, точка с координатами x_1^2,x_2^2 вышла из области Ω и необходимо выполнить возврат в эту область.

Возврат в область Ω выполняется следующим образом. Из точки с координатами x_1^2,x_2^2 опускается перпендикуляр на прямую $ax_1+bx_2+c=0$, т.е. конец вектора (x_1^1,x_2^1; x_1^2,x_2^2) *проектируется* на эту прямую. В результате получается новое приближение - точка с координатами x_1^3,x_2^3, которая принадлежит области Ω. В этой точке вычисляется значение целевой функции Z^3.

Дальнейший "спуск" к относительному минимуму целевой функции продолжается из точки x_1^3,x_2^3. На каждом шаге вычисляется значение целевой функции и проверяется принадлежность нового приближения к области Ω. Вычислительный процесс заканчивается при выполнении условия (4.9).

4.4. Метод неопределенных множителей Лагранжа

Естественно, что решение задач условной оптимизации значительно сложнее решения задач безусловной оптимизации. Естественно стремление сведения задачи условной оптимизации (поиска относительного экстремума) к более простой задаче безусловной оптимизации (поиска абсолютного экстремума). Такая процедура осуществляется в методе Лагранжа. Рассмотрим сущность этого метода.

Необходимо найти условный экстремум нелинейной функции

$$Z(x_1, x_2, \dots x_n) \to \text{extr} \qquad (4.14)$$

n переменных, при m ограничениях

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \dots x_n) \geq b_1,\\
&f_2(x_1, x_2, \dots x_n) = b_2, \qquad (4.15а)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f_m(x_1, x_2, \dots x_n) \leq b_m.
\end{aligned}$$

Ограничения-неравенства преобразуются в равенства, а свободные члены переносятся в левые части ограничений, т.е. система (4.15а) приводится к виду

$$\begin{aligned}
&f_1(x_1, x_2, \dots x_n, b_1) = 0,\\
&f_2(x_1, x_2, \dots x_n, b_2) = 0, \qquad (4.15)\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f_m(x_1, x_2, \dots x_n, b_m) = 0.
\end{aligned}$$

В соответствии с методом Лагранжа вместо относительного экстремума функции (4.14) при ограничениях (4.15) ищется абсолютный экстремум функции Лагранжа, которая имеет следующий вид:

$$L = Z(x_1, x_2, \dots x_n) + \lambda_1 f_1(x_1, x_2, \dots x_n, b_1) + \lambda_2 f_2(x_1, x_2, \dots$$

$$\dots x_n b_2) + \dots + \lambda_m f_m(x_1, x_2, \dots x_n, b_m) \to \text{extr}, \qquad (4.16)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_m$ - неопределенные множители Лагранжа, являющиеся, как и переменные $x_1, x_2, \dots x_n$, искомыми переменными.

Видно, что в функцию Лагранжа входит целевая функция плюс каждое ограничение, умноженное на множитель Лагранжа.

Доказано, что *относительный экстремум целевой функции (4.14) при ограничениях* (4.15) *совпадает с абсолютным экстремумом функции Лагранжа* (4.16).

Поиск абсолютного экстремумам функции (4.16) выполняется известными методами. В частности, определяются и приравниваются к нулю частные производные функции Лагранжа:

$$\partial L/\partial x_1 = \partial Z/\partial x_1 + \lambda_1 \partial f_1/\partial x_1 + \lambda_2 \partial f_2/\partial x_1 + \dots + \lambda_m \partial f_m/\partial x_1 = 0,$$
$$\partial L/\partial x_2 = \partial Z/\partial x_2 + \lambda_1 \partial f_1/\partial x_2 + \lambda_2 \partial f_2/\partial x_2 + \dots + \lambda_m \partial f_m/\partial x_2 = 0,$$

. . . .

$$\partial L/\partial x_n = \partial Z/\partial x_n + \lambda_1 \partial f_1/\partial x_n + \lambda_2 \partial f_2/\partial x_n + \ldots + \lambda_m \partial f_m/\partial x_n = 0, \qquad (4.17)$$

$$\partial L/\partial \lambda_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots x_n, b_1) = 0,$$
$$\partial L/\partial \lambda_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots x_n, b_2) = 0,$$

. . . .

$$\partial L/\partial \lambda_m = f_m(x_1, x_2, \ldots x_n, b_m) = 0.$$

Последние m уравнений представляют собой ограничения (4.15) оптимизационной задачи.

Система (4.17) содержит ($m+n$) уравнений и такое же количество неизвестных.

Решение системы (4.17) даст координаты абсолютного минимума функции Лагранжа (4.16) или относительного минимума целевой функции (4.14) при ограничениях (4.15).

Решение системы (4.17) выполняется известными методами вычислительной математики. Если система (4.17) линейная, используется, как правило, метод Гаусса. Если система (4.17) нелинейная - метод Ньютона.

4.5. Задача оптимального распределения активной мощности в энергосистеме

Одной из важных оптимизационных задач электроэнергетики является задача распределения суммарной активной мощности потребителей энергосистемы между электрическими станциями этой системы. Рассмотрим эту задачу в общем виде для наиболее простого случая, когда в энергосистеме имеются только тепловые электростанции, работающие на одном виде топлива.

В существующей энергосистеме необходимо так распределять активную нагрузку между электростанциями, чтобы затраты на выработку электроэнергии были бы минимальными. Основной составляющей этих затрат является стоимость топлива. Поэтому в качестве минимизируемой целевой функции примем суммарный расход топлива в энергосистеме.

Пусть в энергосистеме имеется n тепловых электростанций. Для агрегатов каждой электростанции известны расходные характеристики, т.е. зависимости расхода топлива B от активной мощности P, вырабатываемой станцией. Эти расходные характеристики имеют нелинейный характер и следующий общий вид:

$$B_i(P_i), \qquad i=1, 2, \dots n. \qquad (4.18)$$

Целевая функция будет представлять собой сумму таких нелинейных зависимостей

$$\mathrm{Z} = B_1(P_1) + B_2(P_2) + \dots + B_n(P_n) \rightarrow \min. \qquad (4.19)$$

В энергосистеме должен соблюдаться баланс мощностей, в соответствии с которым сумма вырабатываемых станциями мощностей должна быть равна суммарной потребляемой мощности

$$P_1+P_2+\dots+P_\mathrm{n}=P_{\text{потр}}. \qquad (4.20)$$

Выражение баланса активной мощности (4.20) и является техническим ограничением в рассматриваемой оптимизационной задаче.

Граничными условиями будут неотрицательные значения искомых мощностей электростанций

$$P_i \geq 0, \quad i=1, 2, \dots n. \qquad (4.21)$$

Соотношения (4.19), (4.20) и (4.21) представляют собой математическую модель поставленной оптимизационной задачи.

Для решения воспользуемся методом Лагранжа. Составим функцию Лагранжа

$$L = B_1(P_1) + B_2(P_2) + \dots B_\mathrm{n}(P_\mathrm{n}) +\lambda(P_1+P_2+\dots+P_\mathrm{n}- P_{\text{потр}}) \rightarrow \min. \quad (4.22)$$

Для определения минимума функции Лагранжа вычислим все ее частные производные и приравняем их к нулю:

$$\begin{aligned} &\partial L/\partial P_1 = \partial B_1/\partial P_1+ \lambda = 0, \\ &\partial L/\partial P_2 = \partial B_2/\partial P_2+ \lambda = 0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\partial L/\partial P_\mathrm{n} = \partial B_\mathrm{n}/\partial P_\mathrm{n} + \lambda = 0, \\ &\partial L/\partial \lambda = P_1+P_2+\dots+P_\mathrm{n}- P_{\text{потр}} = 0. \end{aligned} \qquad (4.23)$$

Из системы (4.23) следует, что она имеет решение при условии

$$\partial B_1/\partial P_1 = \partial B_2/\partial P_2 = \dots = \partial B_\mathrm{n}/\partial P_\mathrm{n} \qquad (4.24)$$

и выполнении баланса мощности (4.20).

Таким образом, оптимальное распределение активной мощности между электростанциями имеет место при равенстве между собой производных от расходных характеристик каждой станции.

4.6. Задачи оптимального распределения компенсирующих устройств в системах электроснабжения

Большинство потребителей электроэнергии кроме активной мощности потребляет и реактивную мощность. В отличие от активной мощности реактивную мощность можно получить непосредственно у потребителей от специальных источников реактивной мощности.

Расстановка источников реактивной мощности в схеме электроснабжения называется *компенсацией реактивной мощности*, а сами источники – *компенсирующими устройствами*. Подробно вопросы компенсации реактивной мощности рассматриваются в специальных курсах.

Основная идея компенсации реактивной мощности заключается в следующем. Рассмотрим простейшую схему электроснабжения (рис. 4.7), включающую в себя линию с активным сопротивлением R, связывающую источник питания напряжением U и потребитель мощностью $P+jQ$.

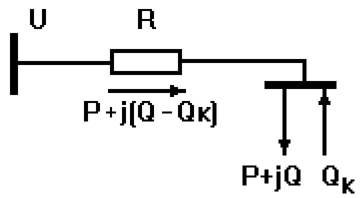


Рис. 4.7. Простейшая схема компенсации реактивной мощности

Потери активной мощности в линии при отсутствии у потребителя компенсирующего устройства ($Q_k=0$) составляют

$$\Delta P=(P^2+Q^2)R\,/\,U^2, \qquad (4.25)$$

при установке у потребителя компенсирующего устройства ($Q_k\neq 0$) эти потери уменьшатся до величины

$$\Delta P=(P^2+(Q-Q_k)^2R)\,/\,U^2. \qquad (4.26)$$

Таким образом, компенсация реактивной мощности позволяет уменьшить потери активной мощности в схеме электроснабжения и, следовательно, улучшить технико-экономические показатели этой схемы.

Из выражений (4.25) и (4.26) видно, что потери мощности ΔP имеют две составляющие: потери от протекания по линии активной мощности P и потери от протекания по линии реактивной мощности Q или $(Q\text{-}Q_k)$. Поскольку компенсация реактивной мощности влияет только на вторую составляющую потерь, в дальнейшем будем рассматривать потери от протекания по линиям только реактивных мощностей.

При проектировании схемы электроснабжения, как правило, минимизируются денежные затраты на эту схему. Снижение потерь мощности за счет установки компенсирующих устройств уменьшает затраты на схему, поскольку каждый потерянный кВт мощности необходимо выработать на электростанциях и, следовательно, затратить на это денежные средства. Однако и компенсирующие устройства требуют денежных затрат.

В связи с этим возникает задача определения оптимальной мощности компенсирующих устройств, отвечающей минимуму суммарных затрат. Такая задача относится к задаче безусловной оптимизации и может быть решена, например, градиентными методами.

Для системы электроснабжения величина суммарной мощности компенсирующих устройств Q_k может быть заданной какими-то техническими условиями. В этом случае заданную мощность Q_k требуется оптимальным образом распределить внутри системы электроснабжения. Это уже задача условной оптимизации и решается, например, методом Лагранжа.

Рассмотрим такую задачу для радиальной схемы электроснабжения (рис. 4.8). Источник питания имеет напряжение U. От этого источника питаются n потребителей с реактивными мощностями Q_1, Q_2, … Q_n. Активные сопротивления линий между источником и потребителями составляют R_1, R_2, … R_n. У каждого i-го потребителя может устанавливаться компенсирующее устройство мощностью Q_{ki}.

Требуется найти оптимальное распределение между потребителями 1, 2, … n заданной суммарной мощности компенсирующих устройств Q_k. Критерий оптимальности – минимум потерь активной мощности в схеме.

Подлежащая минимизации целевая функция, представляющая собой потери активной мощности в схеме, имеет следующий вид:

$$\Delta P = \sum^{n} (Q_i - Q_{ki})^2 R_i / U^2 \to \min. \qquad (4.27)$$

$i=1$

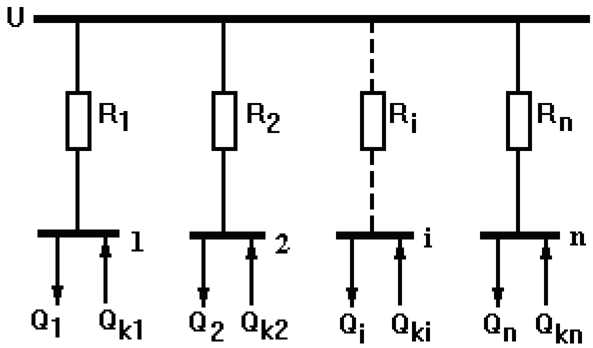


Рис. 4.8. Радиальная схема электроснабжения

Относительный минимум целевой функции ищется при ограничении

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{ki} = Q_k \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} Q_{ki} - Q_k = 0. \qquad (4.28)$$

Запишем функцию Лагранжа:

$$L = \sum_{i=1}^{n} (Q_i - Q_{ki})^2 R_i / U^2 + \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} Q_{ki} - Q_k\right) \to \min. \qquad (4.29)$$

Для отыскания минимума функции L вычислим ее частные производные и приравняем их к нулю:

$$\partial L/\partial Q_{k1} = -2R_1(Q_1 - Q_{k1})/U^2 + \lambda = 0,$$

$$\partial L/\partial Q_{k2} = -2R_2(Q_2 - Q_{k2})/U^2 + \lambda = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\partial L/\partial Q_{ki} = -2R_i(Q_i - Q_{ki})/U^2 + \lambda = 0, \qquad (4.30)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\partial L/\partial Q_{kn} = -2R_n(Q_n - Q_{kn})/U^2 + \lambda = 0,$$

$$\partial L/\partial \lambda = \sum_{i=1}^{n} Q_{ki} - Q_k = 0.$$

Анализ системы (4.30) показывает, что оптимальное распределение заданной суммарной величины компенсирующих устройств Q_k в радиальной схеме электроснабжения подчиняется равенству

$$R_1(Q_1 - Q_{k1}) = R_2(Q_2 - Q_{k2}) = \ldots = R_i(Q_i - Q_{ki}) = \ldots = R_n(Q_n - Q_{kn}). \qquad (4.31)$$

Рассмотрим задачу оптимального распределения заданной мощности компенсирующих устройств Q_k между потребителями 1, 2, … n в магистральной схеме электроснабжения (рис. 4.9).

Подлежащая минимизации целевая функция имеет следующий вид:

$$\Delta P = R_1\Big(\sum_{1}^{n} Q_i - \sum_{1}^{n} Q_{ki}\Big)^2/U^2 + R_2\Big(\sum_{2}^{n} Q_i - \sum_{2}^{n} Q_{ki}\Big)^2/U^2 + \ldots$$

$$\ldots + R_i\Big(\sum_{i}^{n} Q_i - \sum_{i}^{n} Q_{ki}\Big)^2/U^2 + \ldots + R_n(Q_n - Q_{kn})^2/U^2 \rightarrow \min. \qquad (4.32)$$

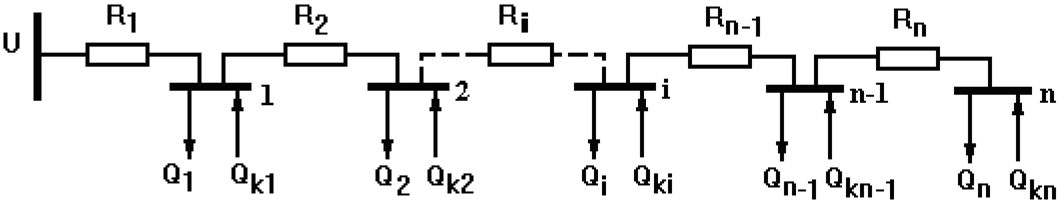


Рис. 4.9. Магистральная схема электроснабжения

Относительный минимум целевой функции ищется при ограничении

$$\sum_{i=1}^{n} Q_{ki} = Q_k \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{n} Q_{ki} - Q_k = 0. \qquad (4.33)$$

Запишем функцию Лагранжа

$$L = R_1\Big(\sum_{1}^{n} Q_i - \sum_{1}^{n} Q_{ki}\Big)^2/U^2 + R_2\Big(\sum_{2}^{n} Q_i - \sum_{2}^{n} Q_{ki}\Big)^2/U^2 + \ldots \qquad (4.34)$$

$$\ldots + R_i\Big(\sum_{i}^{n} Q_i - \sum_{i}^{n} Q_{ki}\Big)^2/U^2 + \ldots + R_n(Q_n - Q_{kn})^2/U^2 + \lambda\Big(\sum_{1}^{n} Q_{ki} - Q_k\Big) \rightarrow \min.$$

Для отыскания минимума функции L вычислим ее частные производные и приравняем их к нулю:

$$\partial L/\partial Q_{k1} = -a_1\Big(\sum_{1}^{n} Q_i - \sum_{1}^{n} Q_{ki}\Big) + \lambda = 0,$$

$$\partial L/\partial Q_{k2} = -a_1\Big(\sum_{1}^{n} Q_i - \sum_{1}^{n} Q_{ki}\Big) - a_2\Big(\sum_{2}^{n} Q_i - \sum_{2}^{n} Q_{ki}\Big) + \lambda = 0,$$

$$\partial L/\partial Q_{k3} = -a_1\left(\sum_1^n Q_i - \sum_1^n Q_{ki}\right) - a_2\left(\sum_2^n Q_i - \sum_2^n Q_{ki}\right) - a_i\left(\sum_3^n Q_i - \sum_3^n Q_{ki}\right) + \lambda = 0,$$

. . . .

$$\partial L/\partial Q_{ki} = -a_1\left(\sum_1^n Q_i - \sum_1^n Q_{ki}\right) - a_2\left(\sum_2^n Q_i - \sum_2^n Q_{ki}\right) - \ldots - a_i\left(\sum_i^n Q_i - \sum_i^n Q_{ki}\right) + \lambda = 0,$$

. . . . (4.35)

$$\partial L/\partial Q_{k,n-1} = -a_1\left(\sum_1^n Q_i - \sum_1^n Q_{ki}\right) - a_2\left(\sum_2^n Q_i - \sum_2^n Q_{ki}\right) - \ldots - a_i\left(\sum_i^n Q_i - \sum_i^n Q_{ki}\right) - \ldots$$

$$\ldots - a_{n-1}(Q_{n-1} + Q_n - Q_{k,n-1} - Q_{kn}) + \lambda = 0,$$

$$\partial L/\partial Q_{kn} = -a_1\left(\sum_1^n Q_i - \sum_1^n Q_{ki}\right) - a_2\left(\sum_2^n Q_i - \sum_2^n Q_{ki}\right) - \ldots - a_i\left(\sum_i^n Q_i - \sum_i^n Q_{ki}\right) - \ldots$$

$$\ldots - a_n(Q_n - Q_{kn}) + \lambda = 0,$$

$$\partial L/\partial \lambda = \sum_1^n Q_{ki} - Q_k = 0,$$

где $a_i = 2R_i/U^2$.

Из 1-го уравнения системы (4.35) следует, что

$$a_1\left(\sum_1^n Q_i - \sum_1^n Q_{ki}\right) = \lambda. \qquad (4.36)$$

С учетом этого соотношения из 2-го уравнения системы следует, что

$$\left(\sum_2^n Q_i - \sum_2^n Q_{ki}\right) = 0. \qquad (4.37)$$

Подставив соотношения (4.36) и (4.37) в 3-е уравнение системы, получим

$$\left(\sum_3^n Q_i - \sum_3^n Q_{ki}\right) = 0 \qquad (4.38)$$

и так далее. Из третьего снизу уравнения системы (4.35) получим, что

$$Q_{n-1} + Q_n - Q_{k,n-1} - Q_{kn} = 0 \qquad (4.39)$$

Из предпоследнего уравнения системы получим

$$Q_n - Q_{kn} = 0 \quad \text{или} \quad Q_{kn} = Q_n. \qquad (4.40)$$

Как следует из (4.40), у последнего n-го потребителя следует установить компенсирующее устройство мощностью, равной реактивной мощности этого потребителя. В таком случае говорят о полной компенсации реактивной мощности потребителя.

Из (4.39), (4.38) и (4.37) следует, что у (n-1)-го, … 3-го и 2-го потребителей также следует выполнить полную компенсацию реактивной мощности.

Однако при расстановке компенсирующих устройств необходимо учитывать ограничение - последнее уравнение системы (4.34).

Таким образом, в магистральной схеме электроснабжения компенсирующие устройства следует устанавливать в соответствии с условиями полной компенсации реактивной мощности $Q_{ki} = Q_i$, начиная от конца магистральной схемы к ее началу (от n-го потребителя к 1-му потребителю), до выполнения условия $\Sigma Q_{ki} = Q_k$, i=1, 2, ... n.

Если у i-го потребителя это условие выполнилось, то у потребителей 1, 2, … i-1 компенсирующие устройства не устанавливаются.

Пример *7*. В существующей схеме электроснабжения (рис. 4.10) требуется определить мощности компенсирующих устройств $Q_{к1}$ и $Q_{к2}$ в узлах 1 и 2 исходя из условия минимума суммарных затрат на установку этих устройств и покрытие потерь активной мощности в схеме.

Исходные данные:

напряжение схемы U= 10 кВ;

сопротивления линий R_1=6 Ом, R_2=4 Ом;

реактивные нагрузки узлов 1 и 2 Q_1=600 квар и Q_2=800 квар;

удельные затраты на установку компенсирующих устройств z_o=0,5 у.е./квар;

удельные затраты на покрытие потерь активной мощности c_o=10 у.е./кВт.

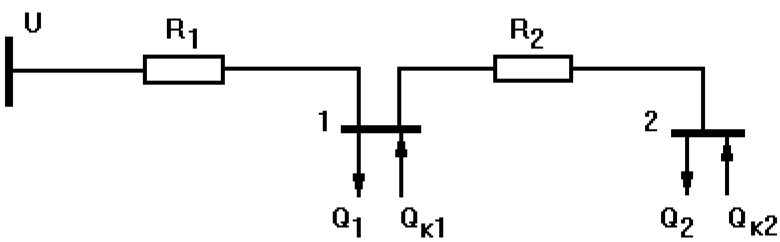


Рис. 4.10. Схема электроснабжения

Решение. Целевая функция, представляющая собой суммарные затраты на установку компенсирующих устройств и покрытие потерь активной мощности в схеме, имеет следующий вид

$$Z = z_0(Q_{k1}+Q_{k2}) + a_1(Q_1+Q_2-Q_{k1}-Q_{k2})^2 + a_2(Q_2-Q_{k2})^2 \to \min,$$

где $a_1 = R_1\, c_o\, 10^{-3}/U^2 = 0{,}0006$;

$a_2 = R_2\, c_o\, 10^{-3}/U^2 = 0{,}0004$.

Введение числового коэффициента 10^{-3} необходимо для приведения всех составляющих целевой функции к одной размерности (у.е.).

Для решения задачи выберем метод покоординатного "спуска". Определим частные производные целевой функции Z по переменным Q_{k1} и Q_{k2}:

$$\partial Z/\partial Q_{k1} = z_0 - 2a_1(Q_1+Q_2-Q_{k1}-Q_{k2});$$

$$\partial Z/\partial Q_{k2} = z_0 - 2a_1(Q_1+Q_2-Q_{k1}-Q_{k2}) - 2a_2(Q_2-Q_{k2}).$$

Примем исходное приближение: $Q_{k1}^0=0$ $Q_{k2}^0=0$. Для этих значений вычислим значения целевой функции и ее частных производных:

$$Z^0 = 0{,}5(0+0)+0{,}0006(600+800-0-0)^2+0{,}0004(800-0)^2 = 1432 \text{ у.е.};$$
$$\partial Z/\partial Q_{k1} = 0{,}5 - 2\cdot 0{,}0006(600+800 - 0 - 0) = -1{,}18;$$
$$\partial Z/\partial Q_{k2} = 0{,}5 - 2\cdot 0{,}0006(600+800-0-0) - 2\cdot 0{,}0004(800 - 0) = -1{,}8.$$

Очевидно, что в направлении переменной Q_{k2} целевая функция Z убывает сильнее, чем в направлении переменной Q_{k1}, поскольку $|\partial Z/\partial Q_{k2}| > |\partial Z/\partial Q_{k1}|$.

В направлении переменной Q_{k2} и начнем "спуск".

Примем величину шага λ=400 квар. Первое приближение (первый шаг) будет $Q_{k1}^1=0$, $Q_{k2}^1=400$ квар. Значение целевой функции $Z^1 = 0{,}5(0+400)+0{,}0006(600+800 - 0 - 400)2+0{,}0004(800 - 400)2=864$ у.е.

Второй шаг: $Q_{k1}^2=0$, $Q_{k2}^2=800$ квар. Значение целевой функции $Z^2 = 616$ у.е.

Третий шаг: $Q_{k1}^3=0$, $Q_{k2}^3=1200$ квар. Значение целевой функции $Z_3 = 689$ у.е.

Очевидно, что "спуск" по координате Q_{k2} целесообразно прекратить, поскольку $Z^3>Z^2$, и вернуться к значениям переменных $Q_{k1}^2=0$, $Q_{k2}^2=800$ квар, полученным на втором шаге.

Выполним новый третий шаг λ=400 квар в направлении другой переменной Q_{k1}: $Q_{k1}^3=400$ квар, $Q_{k2}^3=800$ квар. Значение целевой функции Z^3 = 624 у.е. Движение в направлении переменной Q_{k1} нецелесообразно, поскольку $Z^3 > Z^2$.

Точка с координатами Q_{k1}=0, Q_{k2}=800 квар находится в окрестности минимума целевой функции Z. При принятой длине шага λ=400 квар более точное решение получено быть не может.

В приложении П.4 приведено решение этой нелинейной задачи с помощью программного обеспечения Excel 7.0. Результаты решения следующие:

Q_{k1}=183 квар, Q_{k2}=800 квар, Z=596 у.е.

Это решение более точное, значение целевой функции на 28 у.е. меньше, чем в методе покоординатного спуска с постоянным шагом.

Пример 8. В существующей схеме электроснабжения (рис. 4.11) следует распределить между узлами 1, 2 и 3 суммарную мощность компенсирующих устройств, равную 1000 квар. Критерий оптимальности - минимум потерь активной мощности.

Исходные данные:

напряжение схемы U= 10 кВ;

сопротивления линий R_1=0,4, R_2=0,5, R_3=0,6 Ом;

реактивные нагрузки узлов Q_1=600, Q_2=500, Q_3=400 квар.

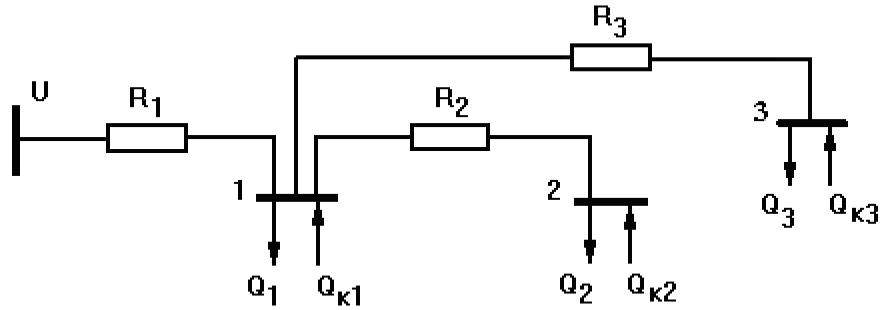


Рис. 4.11. Схема электроснабжения

Решение. В соответствии с исходными данными подлежащие минимизации потери активной мощности (целевая функция) определяются соотношением

$$\Delta P = a_1(Q_1+Q_2+Q_3-Q_{k1}-Q_{k2}-Q_{k3})^2 + a_2(Q_2 - Q_{k2})^2 + a_3(Q_3-Q_{k3})^2 =$$

$$=0{,}004(1500-Q_{k1}-Q_{k2}-Q_{k3})^2+0{,}005(500-Q_{k2})^2+0{,}006(400-Q_{k3})^2 \rightarrow \min,$$

где $a_1 = R_1/U^2$ =0,004;

$a_2 = R_2/U^2$ =0,005.

$a_3 = R_3/U^2$ =0,006.

Суммарная мощность источников реактивной мощности ограничивается условием

$Q_{k1} + Q_{k2} + Q_{k3}$ - 1000=0.

В соответствии с выражением (4.16) функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = 0{,}004(1500 - Q_{k1} - Q_{k2} - Q_{k3})^2 + 0{,}005(500 - Q_{k2})^2 +$$

$$+0{,}006(400 - Q_{k3})^2 + \lambda(Q_{k1} + Q_{k2} - Q_{k3} - 1000)^2 \rightarrow \min.$$

Для определения минимума функции Лагранжа вычислим ее частные производные по всем переменным и приравняем эти производные к нулю:

$$\partial L/\partial Q_{k1} = - 0{,}008(1500 - Q_{k1} - Q_{k2} - Q_{k3}) + \lambda = 0,$$

$$\partial L/\partial Q_{k2} = - 0{,}008(1500 - Q_{k1} - Q_{k2} - Q_{k3}) - 0{,}01(500 - Q_{k2}) + \lambda = 0,$$

$$\partial L/\partial Q_{k3} = - 0{,}008(1500 - Q_{k1} - Q_{k2} - Q_{k3}) - 0{,}012(400 - Q_{k3}) + \lambda = 0,$$

$$\partial L/\partial \lambda = Q_{k1} + Q_{k2} + Q_{k3} - 1000 = 0. \qquad (4.41)$$

Полученная система линейных уравнений легко решается. Из 1-го уравнения системы (4.41) определяется величина множителя Лагранжа:

$$\lambda = 0{,}008(1500 - Q_{k1} - Q_{k2} - Q_{k3}). \qquad (4.42)$$

После подстановки λ во 2-е уравнение системы, получим

$$0{,}01(500 - Q_{k2}) = 0, \qquad (4.43)$$

Откуда Q_{k2} = 500 квар.
После подстановки λ в третье уравнение системы получим

$$(400 - Q_{k3})=0,$$

откуда Q_{k3} = 400 квар.
Из последнего уравнения системы (4.41)

Q_{k1} = 100 квар.

И, наконец, из первого уравнения системы (4.41) найдем величину множителя Лагранжа:

$$\lambda = 0{,}008(1500 - 100 - 500 - 400)= 4.$$

В соответствии с выражением целевой функции минимальные потери активной мощности в схеме электроснабжения при ограничении суммарной мощности компенсирующих устройств величиной Q_k =1000 квар составят

$$\Delta P = 0{,}004(1500 - Q_{k1} - Q_{k2} - Q_{k3})^2 + 0{,}005(500 - Q_{k2})^2 +$$

$$+0{,}006(400 - Q_{k3})^2 = 0{,}004(1500 - 100 - 500 - 400)^2 + 0{,}005(500 -$$

$$- 500)^2 + 0{,}006(400 - 400)^2 = 2 \text{ кВт}$$

5. Оптимизационные задачи с целочисленными и дискретными переменными

5.1. Задачи с целочисленными переменными

В изложенном выше материале по решению оптимизационных задач методами линейного и нелинейного программирования все искомые переменные имели непрерывный характер. Эти переменные в заданном диапазоне изменения могли принимать любые значения.

При решении достаточно большого количества оптимизационных задач все искомые переменные или их часть должны принимать только значения целых чисел. Математическая модель таких задач аналогична рассмотренным выше линейным и нелинейным моделям и содержит целевую функцию, систему ограничений и граничные условия. Однако система ограничений в задачах с целочисленными переменными дополняется ограничениями типа

$$x_k \text{ – целое}, \quad k = 1, 2, \ldots l, \tag{5.1}$$

где l – количество целочисленных переменных, $l \le n;$
n – общее количество переменных.

Оптимизационные задачи, в которых искомые переменные или их часть должны быть целыми числами, решаются методами *целочисленного программирования.*

Введение дополнительных ограничений по целочисленности переменных существенно увеличивает объем вычислений и усложняет вычислительную процедуру при поиске оптимального решения. Однако в заданном диапазоне изменения переменной целочисленная переменная имеет меньшее количество значений, чем непрерывная переменная. В частности, в диапазоне $0 \leq x \leq 3$ целочисленная переменная x имеет четыре значения (x = 0, 1, 2, 3), а непрерывная переменная - бесконечное количество значений.

Попытка решить целочисленную оптимизационную задачу методом *полного перебора* значений переменных приводит к очень большему объему вычислений. Так, например, в задаче с тремя целочисленными переменными и диапазоном их изменения $0 \leq x_k \leq 10$, $k = 1, 2, 3$ количество целочисленных решений составит $11^3=1331$. Ясно, что для реальных оптимизационных задач метод полного перебора не приемлем.

Другая попытка решения целочисленной задачи заключается в решении этой задачи без наложения ограничений вида (5.1). В этом случае решается обычная задача с непрерывными переменными, а полученные *непрерывные переменные округляются* до целых чисел.

В задаче *примера* 2, решенной с непрерывными переменными, был получен следующий результат:

x_1=0; x_2=11,76; x_3 =8,82 изд.; значение целевой функции Z = 235,29 у.е.

Переменные x_1, x_2, x_3 представляют собой количества изделий 1, 2 и 3-го видов и не могут быть дробными числами. Поэтому округлим непрерывные переменные до ближайших больших и меньших целых чисел. В результате получим 4 решения:

$x_1 = 0$, $x_2 = 12$, $x_3 = 9$, значение целевой функции Z = 240 у.е.; решение недопустимое, поскольку не выполняются первое ($2 \cdot 0+2 \cdot 12+3 \cdot 9=51 >50$) и второе ($6 \cdot 0+5{,}5 \cdot 12+4 \cdot 9=102>100$) ограничения;

$x_1 = 0$, $x_2 = 12$, $x_3 = 8$, значение целевой функции Z = 228 у.е.; решение допустимое, все ограничения выполняются;

$x_1 = 0$, $x_2 = 11$, $x_3 = 9$, значение целевой функции Z = 229 у.е.; решение допустимое, все ограничения выполняются;

$x_1 = 0$, $x_2 = 11$, $x_3 = 8$, значение целевой функции Z = 217 у.е.; решение допустимое, все ограничения выполняются.

Видно, что требование целочисленности, как и каждое дополнительное требование, ухудшает значение целевой функции (прибыль уменьшается);

округление непрерывных переменных до ближайших целых чисел привело к недопустимому решению ($x_1 = 0$, $x_2 = 12$, $x_3 = 9$);

округление непрерывных переменных до целых чисел, как в большую, так и в меньшую стороны, дает некоторое множество допустимых решений. Есть ли среди этого множества допустимых решений оптимальное или нет, неизвестно.

Решение целочисленной задачи можно свести к решению непрерывной задачи, вводя дополнительно более простые ограничения, чем ограничение типа (5.1). Так для задачи *примера 2* можно дополнительно ввести ограничения:

$$
\begin{aligned}
&x_2 \le 11,\ x_3 \le 8;\\
&x_2 \le 11,\ x_3 \ge 9;\\
&x_2 \ge 12,\ x_3 \le 8;\\
&x_2 \ge 12,\ x_3 \ge 9
\end{aligned}
$$

и четыре раза решать задачу с непрерывными переменными. Однако и в этом случае нет гарантии, что среди решений будет оптимальное целочисленное решение.

Существуют различные методы решения целочисленных оптимизационных задач: метод отсечений, метод Беллмана, метод ветвей и границ. В частности, метод ветвей и границ основан на переборе допустимых решений, но на переборе не отдельных решений, а их групп. Такой подход сокращает общий объем вычислений.

Однако не будем разбираться в подробностях методов целочисленного программирования, а поручим, как истинный Пользователь, эту разборку компьютеру, поскольку программное обеспечение Excel 7.0 позволяет решать задачи целочисленного программирования.

Ввод исходных данных целочисленной задачи отличается от ввода исходных данных задачи с непрерывными переменными заданием дополнительных ограничений вида (5.1).

Решение задачи *примера* 2 с требованием целочисленности переменных приведено в приложении П.3. Результаты решения этой задачи с непрерывными и целочисленными переменными представлены в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Непрерывные переменные				Целочисленные переменные			
x_1	x_2	x_3	Z	x_1	x_2	x_3	Z
0	11,76	8,82	235,29	0	10	10	230

Из сопоставления двух решений можно сделать следующие выводы:

1. Как и следовало ожидать, значение целевой функции Z в целочисленной задаче ухудшилось, поскольку введено дополнительное ограничение: x_1, x_2, x_3 – целые.

2. Округление непрерывных переменных до целых чисел как в большую, так и в меньшую сторону может привести к неоптимальному и даже недопустимому решению.

3. Оптимальным решением целочисленной задачи может оказаться такое решение, в котором переменные не являются ближайшими к переменным в оптимальном решении непрерывной задачи.

5.2. Двоичные переменные

Частным случаем целочисленных задач являются задачи, в которых искомые переменные могут принимать не любые целые значения, а только одно из двух: либо 0, либо 1. Такие переменные называются двоичными или булевыми.

Распространенными задачами с двоичными переменными являются задачи выбора оптимального решения (варианта) из определенного числа заданных решений (вариантов). Если вариант входит в оптимальное решение, то двоичная переменная, соответствующая этому варианту, равна 1. Если вариант не входит в оптимальное решение, то соответствующая двоичная переменная равна 0. Например, если линия электропередачи входит в оптимальную электрическую сеть, то двоичная переменная, соответствующая этой линии равна 1; если линия электропередачи не входит в оптимальную электрическую сеть, то соответствующая двоичная переменная равна 0.

В отличие от традиционных переменных x_i двоичные переменные будем обозначать δ_i, где $i = 1, 2, \ldots n$.

Применение двоичных переменных позволяет накладывать на решаемую задачу целый ряд логических условий типа «если … , то …».

Если в оптимальное решение должен входить один из двух (i и j) вариантов, то сумма переменных

$$\delta_i + \delta_j = 1. \qquad (5.2)$$

Если в оптимальное решение должны входить и *i*–й и *j*–й варианты, то сумма переменных

$$\delta_i + \delta_j = 2. \qquad (5.3)$$

Если в оптимальное решение может входить или не входить, каждый из двух (*i* и *j*) вариантов, то сумма переменных

$$\delta_i + \delta_j \geq 0. \qquad (5.4)$$

Если при входе (не входе) в оптимальное решение *i*–го варианта в это решение должен войти (не войти) и *j*–й вариант, то

$$\delta_i = \delta_j. \qquad (5.5)$$

Аналогичные условия можно записать для трех и более вариантов. Если из n возможных вариантов в оптимальное решение должны входить только m вариантов ($m < n$), то

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = m. \qquad (5.6)$$

Очевидно, что количество логических условий типа «если … , то …» не ограничено.

5.3. Задачи с дискретными переменными

В ряде практических оптимизационных задач заранее известен набор допустимых решений, из которых требуется выбрать оптимальное решение. Например, одно компенсирующее устройство заданной мощности Q_k можно разместить в узлах 1, 2, … n системы электроснабжения. Требуется выбрать оптимальный узел размещения компенсирующего устройства, соответствующий выбранному критерию.

В ряде других задач искомые переменные могут принимать не любые, а только определенные значения, из которых требуется выбрать значения переменных, отвечающие оптимальному решению. Например, в заданном узле системы электроснабжения нужно установить компенсирующее устройство, мощность которого может быть равной значениям $Q_{\text{k}1}$, Q_{k2}, … Q_{kn}. Из этого ряда требуется выбрать оптимальное значение мощности компенсирующего устройства, соответствующее выбранному критерию.

Указанные задачи относятся к задачам выбора вариантов из числа заданных и решаются методами *дискретного программирования*. В этих методах наряду с традиционными переменными используются двоичные переменные, возможности которых по заданию логических условий рассмотрены в п. 5.2.

Математическая модель задач дискретного программирования аналогична рассмотренным выше моделям и содержит целевую функцию, систему ограничений и граничные условия. Зависимости между переменными в целевой функции и системе ограничений могут быть как линейными, так и нелинейными. Задаваемые значения дискретных переменных могут быть любыми, в том числе и целочисленными.

Пусть в оптимизационной задаче имеется n искомых переменных x_i (i=1, 2, … n). Дискретные значения каждой переменной заданы. В оптимальное решение должны войти k переменных ($k < n$). Каждой переменной x_i поставим в соответствие двоичную переменную δ_i. Если в процессе решения задачи δ_i=1, то переменная x_i войдет в оптимальное решение; если δ_i=0, то переменная x_i не войдет в оптимальное решение.

Целевая функция включает в себя и дискретные $x_1, x_2, \ldots x_n$ и двоичные переменные $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$

$$Z(x_1, x_2, \ldots x_n, \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n) \rightarrow \text{extr}. \qquad (5.7)$$

В систему ограничений входят и дискретные и двоичные переменные

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, \ldots x_n, \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, b_1)=0, \\ &f_2(x_1, x_2, \ldots x_n, \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, b_2)=0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &f_m(x_1, x_2, \ldots x_n, \delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n, b_m)=0. \end{aligned} \qquad (5.8)$$

К этой системе добавляются ограничения вида

$$\delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_n = k, \qquad (5.9)$$

δ_i – двоичные, i =1, 2, … n.

Граничные условия, как таковые, не записываем, поскольку возможные значения дискретных переменных являются заданными, а значения двоичных переменных могут быть только 0 или 1.

Не вдаваясь в подробности методов дискретного программирования, отметим, что программное обеспечение Excel 7.0 позволяет решать оптимизационные задачи с дискретными переменными. Поэтому предоставим пользователю составление математической модели оптимизационной задачи и ввод исходной информации в компьютер, а вычислительную процедуру предоставим компьютеру.

Пример 9. Составить математическую модель для определения в схеме электроснабжения (рис. 5.1) оптимального узла установки компенсирующего устройства, заданной мощности Q_k. Критерий оптимальности - минимум потерь активной мощности в схеме.

Исходные данные:

напряжение схемы U= 10 кВ;

сопротивления линий R_1=0,4, R_2=0,5, R_3=0,6 Ом;

реактивные нагрузки узлов 1, 2 и 3 Q_1=600, Q_2=500, Q_3=400 квар;

мощность компенсирующего устройства Q_k =1000 квар

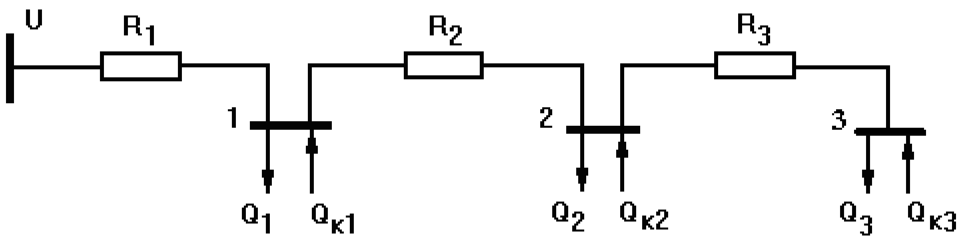


Рис. 5.1. Схема электроснабжения

Решение. В рассматриваемой схеме имеются три узла 1, 2 и 3, в каждом из которых можно установить компенсирующее устройство. Обозначим переменными Q_{k1}, Q_{k2} и Q_{k3} мощности компенсирующих устройств, размещаемых соответственно в узлах 1, 2 и 3. Это дискретные переменные, каждая из которых может принимать два значения 0 или 1000 квар.

Каждой переменной Q_{k1}, Q_{k2} и Q_{k3} поставим в соответствие двоичную переменную δ_1, δ_2 и δ_3.

Целевая функция, представляющая собой потери мощности в схеме, будет иметь следующий вид:

$$\Delta P = a_1(Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_{k1}\delta_1 - Q_{k2}\delta_2 - Q_{k3}\delta_3)^2 + a_2(Q_2 + Q_3 - Q_{k2}\delta_2 -$$

$$- Q_{k3}\delta_3)^2 + a_3(Q_3 - Q_{k3}\delta_3)^2 \rightarrow \min,$$

где $a_i = R_i/U^2$ (i=1, 2, 3).

Выражение для потерь мощности предусматривает возможность установки компенсирующего устройства в каждом из трех узлов. Однако в зависимости от величины двоичной переменной компенсирующее устройство в узле i должно быть установлено при δ_i =1 или не должно быть установлено при δ_i =0.

Перейдем к системе ограничений. Поскольку компенсирующее устройство может быть установлено только в одном узле, сумма двоичных переменных должна быть равна 1

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1,$$

δ_1, δ_2 и δ_3 – двоичные.

Величина дискретной переменной Q_{ki} будет зависеть от значения соответствующей двоичной переменной δ_i. Переменная $Q_{ki} = Q_k$ при δ_i=1 и $Q_{ki} = 0$ при δ_i=0. Запишем эти условия

$$Q_{k1} = Q_k\delta_1,$$
$$Q_{k2} = Q_k\delta_2,$$
$$Q_{k3} = Q_k\delta_3.$$

Граничные условия не записываем, поскольку имеем только двоичные и дискретные переменные.

Результаты решения задачи с помощью программного обеспечения Excel приведены в приложении П5:

$$\delta_1=0, \delta_2=1, \delta_3 = 0, Q_{k1} = 0, Q_{k2} = 1000 \text{ квар}, Q_{k3} = 0, \Delta P = 2010 \text{ Вт}.$$

Таким образом, для обеспечения минимальных потерь мощности компенсирующее устройство мощностью 1000 квар следует установить в узле 2 схемы электроснабжения.

Пример 10. Составить математическую модель для определения оптимальной мощности компенсирующего устройства в узле 2 схемы электроснабжения (рис. 5.1). Критерий оптимальности - минимум потерь активной мощности.

Исходные данные те же, что и в *примере* 9. Мощность компенсирующего устройства может принимать следующие дискретные значения: 1100, 1200 или 1300 квар.

Решение. В рассматриваемом примере имеем одну дискретную переменную – мощность компенсирующего устройства во 2-м узле. Эта переменная может принимать три дискретных значения Q_{k1}=1100, Q_{k2}=1200 и Q_{k3}=1300 квар. Каждому значению дискретной переменной поставим в соответствие двоичную переменную δ_1, δ_2 и δ_3.

Целевая функция, представляющая собой потери мощности в схеме, будет иметь следующий вид:

$$\Delta P = a_1(Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_{k1}\delta_1 - Q_{k2}\delta_2 - Q_{k3}\delta_3)^2 + a_2(Q_2 + Q_3 - Q_{k1}\delta_1 -$$

$$- Q_{k2}\delta_2 - Q_{k3}\delta_3)^2 + a_3 Q_3^2 \rightarrow \min.$$

где $a_i = R_i/U^2$ (i=1, 2, 3).

Рассмотрим ограничения. Поскольку дискретная переменная должна принять только одно значение, сумма двоичных переменных должна быть равна 1

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1,$$

δ_1, δ_2 и δ_3 – двоичные.

Других ограничений нет.

Граничные условия не записываем, поскольку имеем только дискретную и двоичные переменные.

Результаты решения задачи:

δ_1=0, δ_2 =1, δ_3 = 0, Q_{k1} = 0, Q_{k2} = 1200 квар, Q_{k3} = 0, ΔP = 1770 Вт.

Таким образом, для обеспечения минимальных потерь мощности в схеме электроснабжения величину мощности компенсирующего устройства в узле 2 следует принять равной 1200 квар.

6. Оптимизационные задачи при случайной исходной информации

6.1. Основные понятия

В предыдущих главах рассматривалось решение оптимизационных задач, в которых вся исходная информация была однозначно определена. Такая информация называется детерминированной. Примером детерминированной исходной информации могут служить однозначные значения коэффициентов z_i, a_{ij} и b_j (i=1, 2,…n; j=1, 2,…m) в линейной математической модели (2.1). В практических задачах далеко не всегда исходная информация бывает детерминированной.

Достаточно часто исходная информация или ее часть представляют собой случайные величины или случайные функции. В частности, мощности нагрузок в проектируемой системе электроснабжения можно считать случайными величинами, а изменения во времени напряжений в узлах существующей системы электроснабжения – случайными функциями. Для решения оптимизационных задач со случайной исходной информацией используются методы *стохастического программирования*.

Известно, что случайными величинами занимается раздел высшей математики – теория вероятностей. Поэтому прежде чем перейти к методам решения оптимизационных задач вспомним некоторые понятия этой теории.

Случайной величиной s называется такая величина, которая может принять то или иное значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

Случайная величина s может быть *непрерывной или дискретной*. В заданном диапазоне изменения случайной величины количество значений дискретной случайной величины ограничено, а количество значений непрерывной случайной величины не ограничено. Примером непрерывной случайной величины является величина напряжения в некотором узле системы электроснабжения. Примером дискретной случайной величины является количество генераторов, одновременно работающих в энергосистеме.

Математическим ожиданием случайной величины называется ее среднее значение, полученное в результате n реализаций:

$$M[s]=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}s_i\,, \qquad (6.1)$$

где s_i – значение случайной величины в i-й реализации.

Среднеквадратичное (стандартное) отклонение определяет разброс значений случайной величины относительно ее математического ожидания:

$$\sigma\,[s]=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(s_i-M[s])^2}{n-1}}\,. \qquad (6.2)$$

Важной характеристикой случайной величины служит *вероятность P* появления этой случайной величины в конкретном интервале значений.

Для количественной оценки вероятности случайной величины вводится *функция распределения вероятности*. Допустим, что случайная величина s может принимать значения от $-\infty$ до $+\infty$. Функция распределения *P(s)* этой случайной величины показывает вероятность того, что случайная величина попадет в интервал от $-\infty$ до s. Следовательно,

$$P(-\infty) = 0, \quad P(+\infty) = 1. \qquad (6.3)$$

Наибольшее распространение на практике получил *нормальный закон распределения*. В соответствии с этим законом с вероятностью 0,999 случайная величина s ($-\infty < s < +\infty$) находится в интервале

$$M[s] - 3\sigma[s] \le s \le M[s] + 3\sigma[s], \qquad (6.4)$$

что и принимается за действительные пределы изменения случайной величины s.

При решении практических задач достаточно часто применяют *нормальный стандартный закон распределения*. Этот закон описывает вероятность появления стандартной случайной величины η, имеющей математическое ожидание $M[\eta]=0$ и среднеквадратичное отклонение $\sigma[\eta]=1$, в интервале $-3 \le \eta \le 3$ (рис. 6.1).

С помощью этого графика решаются две обратные друг другу задачи. С одной стороны, определяется, каково должно быть значение случайной величины η, чтобы вероятность ее появления составила, например $P(\eta)=0{,}8$. Это значение случайной величины составляет $\eta \le 0{,}84$. С другой стороны, определяется вероятность появления случайной величины η, не превышающей, например значения 0,84 ($\eta \le 0{,}84$). Эта вероятность составляет $P(\eta)=0{,}8$.

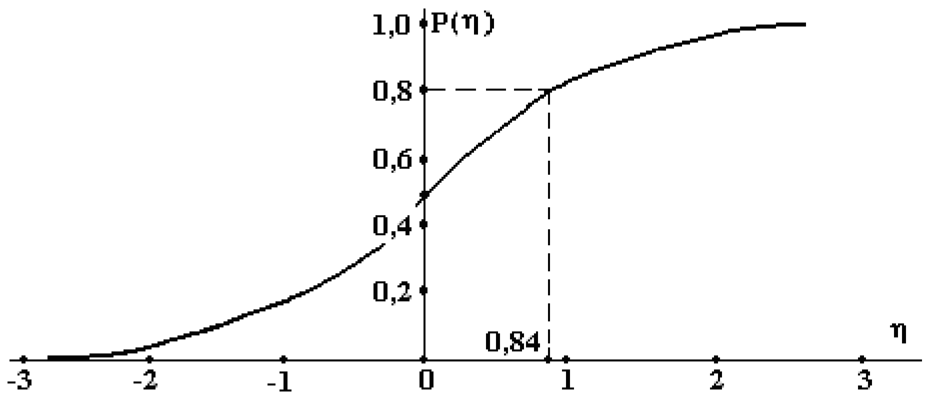


Рис. 6.1. Функция распределения нормального стандартного закона

В Excel эти два вычисления выполняются с помощью статистических функций НОРМСТОБР(0,8)=0,84 и НОРМСТРАСП(0,84) = 0,8 после обращения к мастеру функций f_x в главном меню.

От функции распределения нормального стандартного закона можно перейти к функции распределения нормального закона любой случайной величины s оптимизационной задачи. Связь между этой случайной величиной s и стандартной случайной величиной η выражается зависимостью

$$s = M[s] + \eta\sigma[s]. \qquad (6.5)$$

6.2. Математические модели стохастических задач

Следует иметь в виду, что универсальных методов решения задач стохастического программирования, пригодных для всех классов оптимизационных задач, нет. Поэтому ограничимся рассмотрением математических моделей только одного класса стохастических задач, а именно, стохастических задач линейного программирования.

Напомним, что математическая модель задачи линейного программирования, включающая в себя целевую функцию, ограничения и граничные условия, имеет следующий вид:

$$Z = z_1x_1+z_2x_2+...+z_nx_n \ \rightarrow \ \text{extr},$$

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \le b_1,\\ &a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n = b_2,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{m}nx_n > b_m, \end{aligned} \qquad (6.6)$$

$$d_i \le \ x_i \ \le D_i, \quad i = 1, 2, ...\ n,$$

В детерминированной постановке оптимизационной задачи коэффициенты z_i, a_{ji} и b_j (i=1,2,…n; j=1,2,…m) и границы d_i и D_i диапазона изменения переменных однозначно определены.

Если коэффициенты z_i целевой функции являются случайными величинами, ищется экстремальное значение математического ожидания целевой функции

$$M[Z] \rightarrow \text{extr}; \qquad (6.7)$$

Если коэффициенты a_{ij} и (или) b_j системы ограничений являются случайными величинами, то для каждого j-го ограничения задается значение вероятности $P_{\text{зад } j}$, с которой должно выполняться это ограничение. Вероятность выполнения каждого j-го ограничения должна быть не меньше заданной

$$P(a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+...+a_{jn}x_n \le b_j) \ge P_{\text{зад } j}, \quad j = 1, 2, \dots\ m. \qquad (6.8)$$

Граничные условия в практических оптимизационных задачах, как правило, не содержат случайных величин и записываются без изменения.

Итак, математическая модель задачи стохастического программирования имеет следующий вид:

$$M[Z] \to \text{extr};$$

$$P(a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+...+a_{jn}x_n \le b_j) \ge P_{\text{зад } j}, \quad j=1, 2, \dots m; \qquad (6.9)$$

$$d_i \le x_i \le D_i, \quad i = 1, 2, ... n.$$

6.3. Детерминированный эквивалент стохастической задачи

Стохастические задачи, математические модели которых представлены в виде (6.9), непосредственно решены быть не могут. Как правило, задачи со случайной исходной информацией сводят к их детерминированному эквиваленту. Для этого случайные величины заменяются их характеристиками (математическим ожиданием, стандартным отклонением) и считается, что случайная величина имеет нормальный закон распределения.

Если случайными величинами являются коэффициенты z_i целевой функции, эти коэффициенты заменяются их математическими ожиданиями. В результате такой замены получим детерминированный эквивалент целевой функции

$$M[Z] = M[z_1]x_1+M[z_2]x_2+\dots M[z_n]x_n \to \text{extr}. \qquad (6.10)$$

Для каждого j-го ограничения задается вероятность $P_{\text{зад } j}$, с которой должно выполняться это ограничение. По значению $P_{\text{зад } j}$ находится значение стандартной случайной величины η. С учетом соотношения (6.5) осуществляется переход от стандартной случайной величины η к случайным величинам оптимизационной задачи a_{ij} и b_j.

Если случайной величиной являются коэффициенты b_j, то детерминированный эквивалент j-го ограничения будет иметь вид

$$a_{j1}x_1+a_{j2}x_2+...+a_{jn} \le M[b_j] + \eta\sigma[b_j], \qquad j=1,2,\dots m. \qquad (6.11)$$

Если случайной величиной являются коэффициенты a_{ij}, то детерминированный эквивалент j-го ограничения будет иметь вид

$$M[a_{j1}]x_1+M[a_{j2}]x_2+...+M[a_{jn}]x_n+\eta(\sigma[a_{j1}]x_1+\sigma[a_{j2}]x_2+\dots+\sigma[a_{jn}]x_n) \le b_j,$$

$$j=1,2,\dots m. \qquad (6.12)$$

Граничные условия остаются без изменения в виде

$d_i \le x_i \le D_i, \quad i = 1, 2, \dots n.$

Таким образом, математическая модель стохастической задачи сводится к детерминированному эквиваленту (6.10), (6.11) и (6.12).

Следует отметить, что в основной массе стохастических задач далеко не все коэффициенты z_i, a_{ji} и b_j (i=1,2,…n; j=1,2,…m) могут быть случайными величинами. Часто такими величинами могут быть один или несколько коэффициентов.

Пример 11. Составить математическую модель задачи распределения ресурсов (*примеры* 1 и 2) для случая, когда количество сырьевого ресурса на предприятии является случайной величиной. Известна поставка сырья за некоторый предыдущий период.

Решение. В *примерах* 1 и 2 была получена следующая детерминированная математическая модель задачи:

$Z = 8x_1+11x_2+12x_3 \to \max;$

$2x_1+ 2x_2 + 3x_3 \le 50,$
$6x_1+ 5{,}5x_2 +4x_3 \le 100,$
$4x_1+ 6x_2 + 8x_3 \le 150,$
$x_1+ x_2+ x_3 \ge 15;$

$x_i \ge 0, \quad i = 1, 2, 3.$

В п. 5.1. к этой модели было добавлено условие целочисленности переменных:

x_i – целое, i = 1, 2, 3.

В поставленной задаче коэффициент b_3 (количество сырьевого ресурса) является случайной величиной.

Поставка сырья за некоторый предыдущий период представлена в виде табл. 6.1.

Таблица 6.1

День	1	2	3	4	5	6	$M[b_3]$	$\sigma[b_3]$
Поставка сырья, е.с.	180	150	125	120	170	155	150	23,9

В этой же таблице приведены рассчитанные по выражениям (6.1) и (6.2) значения математического ожидания $M[b_3]$ и стандартного отклонения $\sigma[b_3]$ сырьевого ресурса. Отметим, что математическое ожидание сырьевого ресурса равно его детерминированному значению (150 е.с.).

Поскольку в 3-м ограничении b_3 является случайной величиной, перепишем это ограничение в соответствии с выражением (6.11):

$$a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3 \le M[b_3] + \eta\sigma[b_3]$$

или

$$4x_1+6x_2+8x_3 \le 150 + \eta 23{,}9.$$

Зададимся вероятностями выполнения 3-го ограничения $P_{\text{зад }3}$ = 0,4; 0,5 и 0,6.

Тогда в соответствии с рис. 6.1 стандартная случайная величина будет соответственно равна η = - 0,25; 0 и 0,25. Рассматриваемое 3-е ограничение будет иметь вид

$$4x_1+6x_2+8x_3 \le 150 - 0{,}25\cdot 23{,}9$$

или

$$4x_1+6x_2+8x_3 \le 150$$

или

$$4x_1+6x_2+8x_3 \le 150 + 0{,}25\cdot 23{,}9.$$

Видно, что при вероятностных исходных данных в ограничении появляется *дополнительный сырьевой ресурс*. Величина и знак этого дополнительного ресурса зависят от $P_{\text{зад }3}$ задаваемой вероятности выполнения ограничения.

Полученный детерминированный эквивалент рассматриваемой стохастической задачи имеет следующий вид:

целевая функция

$$Z = 8x_1+11x_2+12x_3 \to \max;$$

ограничения

$$2x_1+ 2x_2 + 3x_3 \le 50,$$
$$6x_1+ 5{,}5x_2 +4x_3 \le 100,$$
$$4x_1+ 6x_2+8x_3 \le 150 + \eta 23{,}9;$$
$$x_1+ x_2+ x_3 \ge 15;$$

условие целочисленности

x_i – целое;

граничные условия

$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$

Решение этой стохастической задачи полностью аналогично решению линейной целочисленной задачи, приведенному в приложении П.2.

7. Оптимизационные задачи при недетерминированной исходной информации

В реальных оптимизационных задачах часто приходится искать решение в условиях неопределенности. Основной причиной неопределенности является недостаток исходной информации. Применительно к области электроэнергетики примером неопределенной (недетерминированной) информации может служить перспективный рост мощностей в развивающейся электроэнергетической системе.

Для решения оптимизационных задач с недетерминированной информацией методы математического программирования не пригодны. Здесь используется вычислительный аппарат теории игр.

В соответствии с этой теорией оптимизационная задача представляется игрой двух игроков. Первый игрок – человек, который принимает решение. В приведенном примере человек должен принять решение по расположению в энергосистеме новых электростанций, строительству линий электропередачи и подстанций. Человек – разумный игрок. Его стратегия – максимальный выигрыш или минимальный проигрыш. Другими словами - человек минимизирует затраты.

Второй игрок – энергосистема, а точнее перспективные мощности потребителей энергии. Как будет развиваться энергосистема, каковы будут мощности потребителей в перспективе – однозначно неизвестно. Стратегия энергосистемы – случайная. Она не стремится к максимальному выигрышу. Следовательно, энергосистему нельзя считать разумным игроком.

При решении оптимизационной задачи составляется платежная матрица, которая представляет собой таблицу затрат в игре двух игроков. Строки матрицы соответствуют решениям (ходам), которые может принять первый игрок. Столбцы – ходам, которые может сделать второй игрок. Процесс составления платежной матрицы достаточно сложен и в каждом конкретном случае может быть различным. Этот этап решения задачи позднее рассмотрим на конкретном примере.

Допустим, что платежная матрица составлена (табл. 7.1).

Имеется набор ходов человека, которые обозначим как x_1, x_2, … x_n. Имеется набор ходов энергосистемы y_1, y_2, ... y_m. Если человек выберет ход x_i, а система ответит ходом y_j, то затраты при таком раскладе составят z_{ij}. Оптимальное решение выбирается в результате анализа платежной матрицы.

Таблица 7.1

	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m
x_1	z_{11}	z_{12}	…	z_{1j}	…	z_{1m}
x_2	z_{21}	z_{22}	…	z_{2j}	…	z_{2m}
…	…	…	…	…	…	…
x_i	z_{i1}	z_{i2}	…	z_{ij}	…	z_{im}
…	…	…	…	…	…	…
x_n	z_{n1}	z_{n2}	…	z_{nj}	…	z_{nm}

Рассмотрим основные стратегии выбора решения, которые предлагает теория игр.

1. *Стратегия минимума средних затрат*. В соответствии с этой стратегией для каждого хода x_i человека определяются средние затраты по всем возможным ходам системы

$$Z_{\text{ср } i} = \left(\sum_{j=1}^{m} z_{ij}\right) / m. \qquad (7.1)$$

Выбирается решение, отвечающее минимуму из совокупности i =1, 2, … n средних затрат

$$x_i \to \min_{i=1}^{n} Z_{\text{ср } i}, \qquad (7.2)$$

При этой стратегии считается, что все ходы системы имеют одинаковую вероятность, равную $1/m$. Для реальных задач такое предположение, как правило, не является истиной.

2. *Миниминная стратегия*. В соответствии с этой стратегией считается, что на каждый ход x_i человека система ответит ходом y_j, соответствующим минимальным затратам

$$z_{\min i} = \min^{m} z_{ij}. \qquad (7.3)$$

$j=1$

Выбирается решение, отвечающее минимуму из совокупности i =1, 2, … n минимальных затрат

$$x_i \rightarrow \min_{i=1}^{n} \min_{j=1}^{m} z_{ij}. \qquad (7.4)$$

Принятие решения по этой стратегии может привести к крупным просчетам, поскольку здесь учитывается самая благоприятная ситуация. Систему нельзя считать разумным игроком, однако она не будет играть и в поддавки.

3. *Минимаксная стратегия.* В соответствии с этой стратегией считается, что на каждый ход x_i человека система ответит ходом y_j, соответствующим максимальным затратам:

$$z_{\max i} = \max_{j=1}^{m} z_{ij}. \qquad (7.5)$$

Выбирается решение, отвечающее минимуму из совокупности i =1, 2, … n максимальных затрат:

$$x_i \rightarrow \min_{i=1}^{n} \max_{j=1}^{m} z_{ij}. \qquad (7.6)$$

В этой стратегии учитывается самая неблагоприятная ситуация. Считается, что система является разумным игроком и стремится к максимальному выигрышу. Такое предположение не соответствует действительности.

4. *Стратегия Гурвица*. Эта стратегия учитывает как самую благоприятную, так и самую неблагоприятную ситуации. Здесь решение выбирается по условию

$$x_i \rightarrow \min_{i=1}^{n} (k \max_{j=1}^{m} z_{ij} + (1- k) \min_{j=1}^{m} z_{ij}), \qquad (7.7)$$

где коэффициенты k и (1-k)играют роль весовых коэффициентов, с которыми учитываются минимаксная и миниминная стратегии. При k=1 имеем минимаксную стратегию, а при k=0 имеем миниминную стратегию.

Наибольшую трудность при применении этой стратегии представляет определение величины весовых коэффициентов k и (1-k). Теория игр ответа на этот вопрос не дает. Для каждой конкретной задачи весовые коэффициенты определяются индивидуально, на основе имеющегося опыта.

Таким образом, для решения оптимизационной задачи при недетерминированной исходной информации теория игр выдвигает ряд стратегий. Поскольку формально все стратегии равноправны, окончательное решение должно выбираться на основе:

анализа решений, полученных по каждой стратегии;

опыта проектировщика;

особенностей конкретной задачи.

Пример 12. В развивающейся энергосистеме требуется определить оптимальный объем ввода генерирующих мощностей электростанций. Перспективный рост энергопотребления в системе недостаточно определен. Известно лишь, что суммарная мощность потребителей энергосистемы в будущем может иметь значения 15, 20, 25 и 30 е.м. (единиц мощности).

На момент принятия решения мощность собственных электростанций энергосистемы составляет 10 е.м. Затраты на ввод каждой новой единицы мощности составляют 5 у.е./е.м.

В перспективе энергосистема может оказаться на самобалансе (будет обеспечивать потребителей за счет собственных электростанций) или при дефиците мощности. Во втором случае недостающую мощность можно получить из соседней энергосистемы. При этом за каждую единицу мощности, взятую из соседней системы, необходимо платить 7 у.е./е.м.

Решение. Имеем четыре возможных хода энергосистемы (y_1=15; y_2= 20; y_3=25; y_4=30 е.м.) Примем четыре возможных хода человека (x_1=15; x_2= 20; x_3=25; x_4=30 е.м.). Составим платежную матрицу и заполним ее (табл. 7.2).

Т а б л и ц а 7.2

	y_1=15	y_2= 20	y_3=25	y_4=30
x_1=15	25	60	95	130
x_2=20	50	50	$10 \cdot 5+5 \cdot 7$=85	120
x_3=25	75	75	75	110
x_4=30	100	100	100	100

Процесс заполнения платежной матрицы поясним на следующем примере. Человек выбирает ход x_2 = 20 е.м., а энергосистема - ход y_3 = 25 е.м. В соответствии с ходом человека дополнительно вводятся 10 е.м. Затраты на их ввод составят $10 \cdot 5$=50 у.е. В соответствии с ходом энергосистемы дефицит мощности составит 5 е.м. Эту мощность необходимо купить в соседней энергосистеме. Затраты на покупку составят $5 \cdot 7=35$ у.е. Итоговые затраты составят $50+35=85$ у.е. Остальные клетки платежной матрицы заполняются аналогично.

Рассмотрим выбор решений по различным стратегиям теории игр.

Средние затраты для каждого хода человека составят:

$Z_{ср\ 1}= (25+60+95+130)/4 = 77{,}5$ у.е.
$Z_{ср\ 2}= (50+50+85+120)/4 = \boldsymbol{76{,}25}$ у.е.
$Z_{ср\ 3}= (75+75+75+110)/4 = 83{,}75$ у.е.
$Z_{ср\ 4}= (100+100+100+100)/4 = 100$ у.е.

По стратегии средних затрат следует принять решение x_2, соответствующее вводу 10 е.м.

Минимальные затраты для каждого хода человека составят:

$Z_{\min 1}= \min(25+60+95+130) =\boldsymbol{25}$ у.е.
$Z_{\min 2}= \min(50+50+85+120) = 50$ у.е.
$Z_{\min 3}= \min(75+75+75+110) = 75$ у.е.
$Z_{\min 4}= \min(100+100+100+100) = 100$ у.е.

По миниминной стратегии следует принять решение x_1, соответствующее вводу 5 е.м.

Максимальные затраты для каждого хода человека составят:

$Z_{\max 1}= \max(25+60+95+130) =130$ у.е.
$Z_{\max 2}= \max(50+50+85+120) = 120$ у.е.
$Z_{\max 3}= \max(75+75+75+110) = 110$ у.е.
$Z_{\max 4}= \max(100+100+100+100) = 100$ у.е.

По минимаксной стратегии следует принять решение x_4, соответствующее вводу 20 е.м.

При применении стратегии Гурвица примем коэффициент k=0,5. При таком коэффициенте миниминная и минимаксная стратегии учитываются с одинаковым весом, поскольку k=0,5 и (1-k)=0,5.

Затраты для каждого хода человека составят:

$Z_1= 0{,}5 \cdot 130+0{,}5 \cdot 25 = \boldsymbol{77{,}5}$ у.е.
$Z_2= 0{,}5 \cdot 120+0{,}5 \cdot 50 = 85$ у.е.
$Z_3= 0{,}5 \cdot 110+0{,}5 \cdot 75 = 92{,}5$ у.е.
$Z_4= 0{,}5 \cdot 100+0{,}5 \cdot 100 = 100$ у.е.

Руководствуясь стратегией Гурвица, следует принять решение x_1, соответствующее вводу 5 е.м.

Итак, по стратегии средних затрат следует принять решение x_2 (ввод 10 е.м.); по миниминной стратегии – решение x_1 (ввод 5 е.м.); по минимаксной стратегии – решение x_4 (ввод 20 е.м.); по стратегии Гурвица – решение x_1 (ввод 5 е.м.).

Разные стратегии предлагают разные решения. Причем две стратегии предлагают одинаковое решение x_1. Окончательный выбор остается за человеком.

Поскольку решение x_3 (ввод 15 е.м.) не дала ни одна стратегия, это решение не принимаем. Не будем принимать решения x_1 и x_4, диктуемые самой благоприятной и самой неблагоприятной ситуациями развития энергосистемы. Остается решение x_2, отвечающее вводу в энергосистеме 10 е.м. Это решение и будем считать оптимальным.

8. Многокритериальные оптимизационные задачи

8.1. Определение коэффициентов веса каждого критерия

Рассмотренные выше решения оптимизационных задач выполнялись по одному критерию (по одной целевой функции). На практике не всегда удается свести задачу к одному критерию, поскольку желаемых целей может быть несколько.

Задачи, в которых оптимизация проводится по нескольким критериям, называют задачами *многокритериальной оптимизации.* Такая оптимизация представляет собой попытку найти компромисс между принятыми критериями.

Важным моментом нахождения такого компромисса является назначение *коэффициентов веса* каждого критерия. В конечном итоге решение многокритериальной задачи сводится к оптимизации по одному обобщенному критерию, в который входят все принятые критерии со своими весовыми коэффициентами.

Существует достаточно много способов определения весовых коэффициентов. Рассмотрим один из них, а именно, способ экспертных оценок. Суть этого способа заключается в следующем.

Пусть для решения оптимизационной задачи приняты, например, три критерия (критерий A, критерий B и критерий C). Собирается группа экспертов – специалистов в той области, к которой относится оптимизационная задача. Пусть группа экспертов состоит, например, из трех человек (1-й эксперт, 2-й эксперт и 3-й эксперт). Каждому эксперту предлагается оценить в баллах от 0 до 1 каждый критерий. При этом выдвигается условие, чтобы сумма баллов каждого эксперта по всем критериям была бы равна 1.

В табл. 8.1 представлены результаты экспертизы. В качестве весового коэффициента i-го критерия ($i=A, B, C$) принимается среднее значение оценок каждого эксперта по этому критерию (последняя строка табл. 8.1).

Таблица 8.1

	Критерии			
Эксперты	*A*	*B*	*C*	Сумма
1-й	0,2	0,2	0,6	1,0
2-й	0,4	0,3	0,3	1,0
3-й	0,3	0,2	0,5	1,0
Коэф.веса	0,3	0,23	0,47	1,0

8.2. Оптимизация по обобщенной целевой функции

Одним из возможных решений многопараметрической задачи является оптимизация по обобщенной целевой функции, в которую входят все принятые к рассмотрению критерии со своими весовыми коэффициентами. Эта обобщенная функция записывается следующим образом:

$$Z_{об} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\alpha_k Z_k}{Z_{k\ норм}} \to \max, \qquad (8.1)$$

Z_k – *k*-я целевая функция, выражающая *k*-й критерий;
$Z_{k\ норм}$ – нормированное значение *k*-й целевой функции;
α_k – коэффициент веса *k*-й целевой функции;
s – количество целевых функций (принятых критериев).

Если *k*-я целевая функция максимизируется, перед ней под знаком суммы ставится плюс. Если *k*-я целевая функция минимизируется, перед ней под знаком суммы ставится минус.

Весовые коэффициенты могут быть определены, например, с помощью экспертных оценок (см. п. 8.1).

Нормированное значение *k*-й целевой функции $Z_{k\ норм}$ принимается по результатам решения оптимизационной задачи только по одному *k*–му критерию.

Целевые функции в общем случае имеют разные единицы измерения. Поэтому в (8.1) введено деление каждой целевой функции на ее нормированное значение. Такое действие приводит все целевые функций к единой размерности (к относительным единицам, о.е.).

Составление ограничений и граничных условий для многокритериальной задачи не имеет специфических особенностей по сравнению с однокритериальной задачей.

Пример 13. Рассмотрим задачу распределения ресурсов (*примеры* 1 и 2), в которой требуется определить оптимальный выпуск изделий трех видов (x_1, x_2 и x_3), обеспечивающий предприятию максимальную прибыль при минимальном расходе энергетических ресурсов.

Решение. Решение задачи только по критерию максимальной прибыли выполнено ранее (см. приложение П.3) и дало следующий результат:

x_1=0, x_2=10, x_3=10, прибыль Z_1=230 у.е.

Решим эту задачу с учетом только второго критерия – минимального расхода энергоресурсов. Подлежащая минимизации целевая функция, представляющая собой затраты энергоресурсов на выпуск продукции, имеет следующий вид:

$$Z_2 = 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min. \qquad (8.2)$$

Из системы ограничений исключаем неравенство, ограничивающее расход энергоресурсов ($2x_1+2x_2+3x_3 \le 50$), поскольку левая часть этого неравенства стала целевой функцией. В результате имеем следующую систему ограничений, состоящую из трех неравенств:

$$\begin{aligned} &6x_1 + 5{,}5x_2 + 4x_3 \le 100, \qquad (8.3)\\ &4x_1 + 6x_2 + 8x_3 \le 150,\\ &x_1 + x_2 + x_3 \ge 15. \end{aligned}$$

Условия целочисленности переменных

$$x_i \text{ – целое}, \quad i=1, 2, 3 \qquad (8.4)$$

и граничные условия

$$x_i \ge 0, \quad i=1, 2, 3 \qquad (8.5)$$

остаются без изменений.

Решение задачи по 2-му критерию $Z_2 \rightarrow \min$ приведено в приложении П.6 и дает следующий результат:

x_1=0, x_2=15, x_3=0, расход энергии Z_2 = 30 е.э. (единиц энергии).

Для решения двухкритериальной задачи сформируем обобщенную целевую функцию

$$Z_{об} = \alpha_1 Z_1/Z_{1норм} - \alpha_2 Z_2/Z_{2норм} \rightarrow \max.$$

Предположим, что в результате экспертных оценок получены следующие весовые коэффициенты:

$\alpha_1 = 0,6$ и $\alpha_2 = 0,4$.

Обобщенная целевая функция будет иметь следующий вид

$$Z_{об}=0,6(8 x_1 + 11 x_2 + 12x_3) / 230 – 0,4(2x_1 + 2x_2 + 3x_3) / 30.$$

Система ограничений остается в виде (8.3), условие целочисленности переменных – в виде (8.4), граничные условия – в виде (8.5).

Решение рассматриваемой двухкритериальной задачи приведено в приложении П.6 и дает следующий результат:

x_1=4, x_2=1, x_3=16;

обобщенная целевая функция

$$Z_{об} = 0,6 \cdot 235 / 230 + 0,4 \cdot 58 / 30 = 0,28 \text{ о.е.}$$

Результаты решений (значения переменных x_1, x_2, x_3), полученных при максимизации прибыли ($Z_1 \rightarrow \max$), минимизации энергетических ресурсов ($Z_2 \rightarrow \min$) и максимизации обобщенной целевой функции ($Z_{об} \rightarrow \max$), приведены в табл. 8.2.

Таблица 8.2

	$Z_1 \rightarrow \max$	$Z_2 \rightarrow \min$	$Z_{об} \rightarrow \max$
x_1	0	0	4
x_2	10	15	1
x_3	10	0	16

Видно, что результат решения двухкритериальной задачи отличается от результатов решения задачи по каждому из двух критериев.

Библиографический список

1. Курицкий Б.Я. Поиск оптимальных решений средствами EXCEL 7.0.- СПб.: BHV – Санкт-Петербург, 1997.
2. Применение цифровых вычислительных машин в электроэнергетике./ Под ред. О.В Щербачева.-Л.: Энергия, 1980.
3. Аввакумов В.Г. Постановка и решение электроэнергетических задач исследования операций.- Киев: Вища школа, 1983.
4. Модели и методы оптимизации развития энергосистем. Арзамасцев Д.А., Липес А.В, Мызин А.Л. – Свердловск, 1976.

Приложения

П1. Общие сведения об Excel

Материал приложений рассчитан на пользователя, знакомого с основами работы в Excel. Напомним лишь некоторые основные моменты. Общий вид электронной таблицы показан на рис. П.1. В верхней части таблицы указано имя файла, с которым работает пользователь (Книга 1), ниже располагается главное меню (Файл, Правка, … Сервис, …), далее – панель инструментов, строка ввода и рабочее поле электронной таблицы.

Рабочее поле состоит из строк (1, 2, 3, …) и столбцов (*A, B, C*, …). На пересечении строк и столбцов находятся рабочие ячейки. Каждая ячейка таблицы имеет свой адрес, например *A*1, *B*4, С7, …

Microsoft Excel - Книга 1								
Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка								
Панель инструментов								
E2	=	4,5 - C6						
	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Задача			-2,84			
3		Z=						
4						12,3		
5								
6			7,34	12,5		19,84		
7								
8								

Рис. П.1. Общий вид таблицы Excel

В рабочие ячейки заносится различная информация:

текстовая или комментарии (слово «задача» в ячейке *B*2; комментарий «*Z*=» в ячейке *B*3);

цифровая (число «7,34» в ячейке *C*6; число «12,5» в ячейке *D*6);

вычислительная.

Рассмотрим подробнее вычислительную информацию. Вычисления могут выполняться по различным выражениям, как с числами, так и с содержимым рабочих ячеек.

В ячейку *F*4 занесено выражение «=5,3+3,5*2». Это выражение автоматически вычисляется и в ячейке *F*4 приводится результат (12,3).

В ячейку *F*6 занесено выражение *«=C*6+*D*6*»*. Это выражение автоматически вычисляется и в ячейке *F6* приводится результат суммы содержимых ячеек *C*6 и *D*6 (19,84).

В ячейку *E*2 занесено выражение «4,5-*C*6». Это выражение автоматически вычисляется и в ячейке *E*2 приводится результат разности между числом 4,5 и содержимым ячейки *C*6. Этот результат равен -2,84.

Таким образом, после внесения в рабочую ячейку вычислительной информации внешний вид ячейки и ее содержание отличаются по виду. Внешний вид отражает результат вычислений, а содержание – вычисляемое выражение.

Содержимое любой ячейки можно просматривать, изменять и удалять. Для этого к ячейке мышкой подводится курсор, и после нажатия левой кнопки мышки (МЛ) ячейка выделяется. Содержимое ячейки отражается в строке ввода. На рис. П.1 в строке ввода показано содержимое ячейки *E*2.

Для исправления или удаления содержимого ячейки мышкой вводится курсор в строку ввода, МЛ курсор фиксируется на нужном месте и с клавиатуры компьютера вводится исправление или удаление содержимого ячейки.

Последовательность операций при решении оптимизационных задач с помощью программного обеспечения Excel следующая [1]:

1. Размещение комментариев и исходной информации в ячейках рабочего поля.

2. Вызов из главного меню МЛ команды «Сервис»; из содержания этой команды вызвать МЛ команду «Поиск решения»; на экране появляется диалоговое окно «Поиск решения»; в это диалоговое окно вводится исходная информация (адрес ячейки целевой функции, вид экстремума целевой функции, адреса ячеек искомых переменных, ограничения).

3. Активируется МЛ клавиша «Параметры»; автоматически раскрывается диалоговое окно «Параметры поиска решения». В это диалоговое окно вводится информация по алгоритму поиска решения и активируется МЛ клавиша «ОК», автоматически выполняется возврат к диалоговому окну «Поиск решения».

4. Получение решения. В диалоговом окне «Поиск решения» активируется МЛ клавиша «Выполнить»; компьютер выполняет вычисления; в ячейках рабочего поля появляются результаты решения; открывается диалоговое окно «Результаты поиска решения».

П.2. Решение задач линейного программирования

Последовательность операций по решению задач линейного программирования рассмотрим на *примере* 2.

1. *Размещение комментариев и исходной информации в ячейках рабочего поля*.

Процедура ввода исходных данных может быть достаточно разнообразной, как по последовательности ввода, так и по выбору рабочих ячеек. Примем следующий порядок ввода: если в некоторую рабочую ячейку вводится цифровая или вычислительная информация, то в соседнюю левую ячейку вводится поясняющий текст.

Один из вариантов ввода исходной информации для решения задачи приведен на рис. П.2.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Исходные данные:**						**Переменные**	
2	Прибыль Z1=	8					x1=	0
3	Z2=	11					x2=	0
4	Z3=	12					x3=	0
5	Ресурсы:							
6	энергия =	50					**Целевая функция**	
7	финансы =	100					Z=z1x1+x2x2+z3x3	0
8	сырье =	150						
9	Нормы расхода:							
10	по энергии a11=	2	a12=	2	a13=	3		
11	по финансам a21=	6	a22=	5,5	a23=	4		
12	по сырью a31=	4	a32=	6	a33=	8		
13	Миним. кол-во изделий	15						
14								
15	**Лев.часть ограничений**							
16	a11x1+a12x2+a13x3=	0						
17	a21x1+a22x2+a23x3=	0						
18	a31x1+a32x2+a33x3=	0						
19	x1+x2+x3=	0						

Рис. П.2. Исходная информация задачи примера 2 на рабочем поле

Во всех ячейках столбцов *A, C, E, G* находится поясняющий текст, не влияющий на решение задачи. Этот текст служит только для наглядности исходной информации.

В ячейки *B*2…*B*13, *D*10…*D*12, *F*10…*F*12 помещена цифровая информация, соответствующая тексту слева.

В ячейках *H*2…*H*4 помещены нули - начальные нулевые значения искомых переменных x_1, x_2 и x_3. В ячейку *H*7 помещено выражение целевой функции =*B2***H2*+*B*3**H*3+*B*4**H*4, начальное значение которой равно нулю при начальных нулевых значениях искомых переменных.

В ячейки *B*16…*B*19 помещены левые части ограничений-неравенств:

= *B*10**H*2+*D*10**H*3+*F*10**H*4,
= *B*11**H*2+*D*11**H*3+*F*11**H*4,
= *B*12**H*2+*D*12**H*3+*F*12**H*4,
=*H*2+*H*3+*H*4,

значения которых равны нулю при начальных нулевых значениях искомых переменных.

При работе в Excel не нужно переходить от ограничений неравенств к равенствам. Эту операцию выполнит компьютер.

2. *Команда «Сервис» и ввод исходной информации в диалоговое окно «поиск решения».*

Раскрывается МЛ команда «Сервис» в главном меню; из содержания команды «Сервис» раскрывается МЛ команда «Поиск решения»; на экране появляется диалоговое окно «Поиск решения» (рис. П.3);

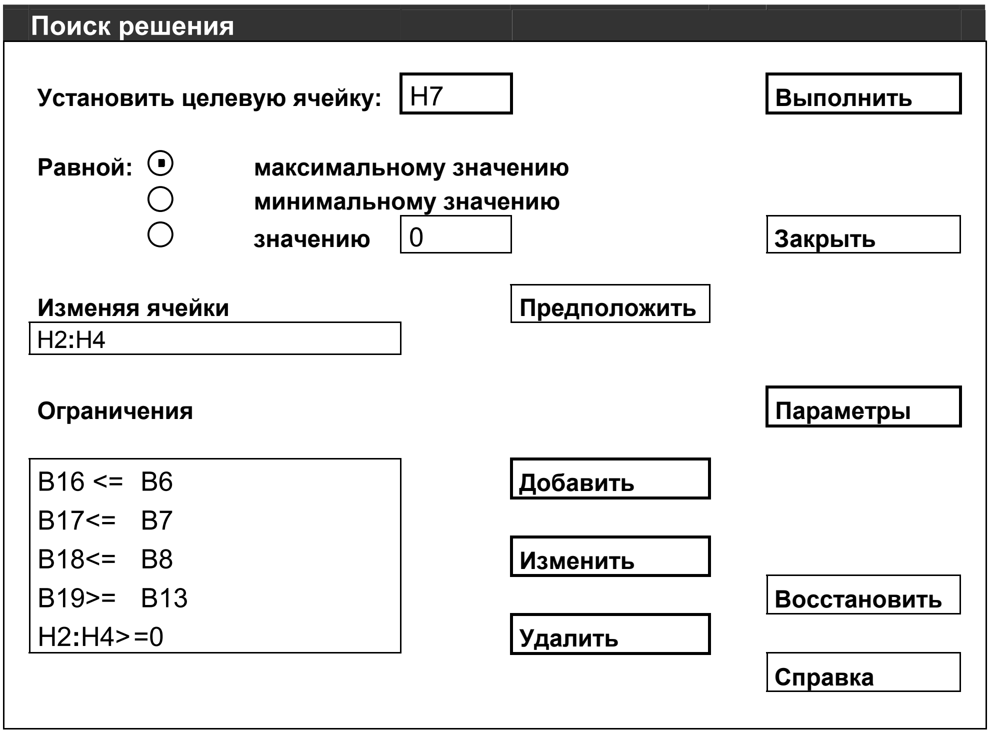


Рис. П.3. Диалоговое окно «Поиск решения»

В этом диалоговом окне устанавливается адрес ячейки с выражением целевой функции. В рассматриваемом примере это адрес *H*7. В перечне «Равной:» отмечается МЛ кнопка «максимальному значению», поскольку требуется найти максимум целевой функции.

В окно «Изменяя ячейки» вводятся адреса ячеек с искомыми переменными x_1, x_2 и x_3. В рассматриваемом случае это массив адресов *H*2, *H*3 и *H*4. Массив адресов ячеек вводится через знак «точка с запятой». С целью сокращения, массив адресов ячеек, идущих по порядку, вводится адресами начальной ячейки и конечной ячейки через знак «двоеточие» *H*2:*H*4 (рис. П.3).

При вводе данных в диалоговые окна у адресов ячеек автоматически появляется знак $. Например, на рис. П.3 адрес целевой ячейки будет выглядеть как H7. Пусть этот факт не смущает пользователя, и он продолжает ввод исходных данных.

Ввод ограничений осуществляется в окне «Ограничения» через активирование МЛ клавиши «Добавить», в результате чего раскрывается диалоговое окно «Добавление ограничения» (рис. П.4).

Рис. П.4. Диалоговое окно «Добавление ограничения»

В окно «Ссылка на ячейку» вводится адрес ячейки, содержащей левую часть ограничения. В среднем окне после активирования МЛ клавиши «▼» вводится вид ограничения (<=, >=, =). В окне «Ограничение» вводится адрес ячейки с правой частью ограничения. Рис. П.4 иллюстрирует ввод ограничения по энергетическим ресурсам $B16<=B6$. После ввода очередного ограничения активируется МЛ клавиша «Добавить» и вводится следующее ограничение. После ввода всех ограничений активируется МЛ клавиша «ОК», в результате чего автоматически осуществляется переход к диалоговому окну «Поиск решения» (рис. П3). В окне «Ограничения» на рис. П.3 показаны все ограничения решаемой задачи.

Граничные условия неотрицательности искомых переменных учитываются в виде ограничения $H2:H4 >= 0$.

Введенные ограничения можно изменять и удалять. Для этого МЛ выделяется ограничение и с помощью активирования МЛ клавиш «Изменить» или «Удалить» выполняется соответствующее действие.

3. *Ввод информации в диалоговое окно «Параметры поиска решения».*

После ввода исходных данных в диалоговом окне «Поиск решения» активируется МЛ клавиша «Параметры» этого диалогового окна, в результате чего раскрывается диалоговое окно «Параметры поиска решения» (рис. П.5).

Рис. П.5. Диалоговое окно «Параметры поиска решения»

В этом диалоговом окне устанавливается МЛ флажок «**v**» у линейной модели, что обеспечивает решение задачи методом линейного программирования (симплекс-методом). Все остальные окна и команды можно использовать по умолчанию, поскольку они подходят для решения большинства оптимизационных задач.

Активизируется МЛ клавиша «ОК»; на экране появляется уже знакомое диалоговое окно «Поиск решения».

4. *Получение решения.*

В диалоговом окне «Поиск решения» активируется МЛ клавиша «Выполнить». Компьютер проводит вычисления. На рабочем поле появляются результаты вычислений (рис П.6):

значения искомых переменных x_1, x_2 и x_3 в ячейках *H*2, *H*3 и *H*4;

максимальное значение целевой функции в ячейке *H*7;

левые части ограничений в ячейках *B*16, *B*17, *B*18 и *B*19.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Исходные данные:**						**Переменные**	
2	Прибыль z1=	8					x1=	0
3	z2=	11					x2=	11,76471
4	z3=	12					x3=	8,823529
5	Ресурсы:							
6	Энергия =	50					**Целевая функция**	
7	финансы =	100					Z=	235,2941
8	сырье =	150						
9	Нормы расхода:							
10	по энергии a11=	2	a12=	2	a13=	3		
11	по финансам a21=	6	a22=	5,5	a23=	4		
12	по сырью a31=	4	a32=	6	a33=	8		
13	Миним. кол-во изделий	15	.					
14								
15	**Лев.часть ограничений**							
16	a11x1+a12x2+a13x3=	50						
17	a21x1+a22x2+a23x3=	100						
18	a31x1+a32x2+a33x3=	141						
19	x1+x2+x3=	20,6						

Рис. П.6. Результаты решения задачи на рабочем поле

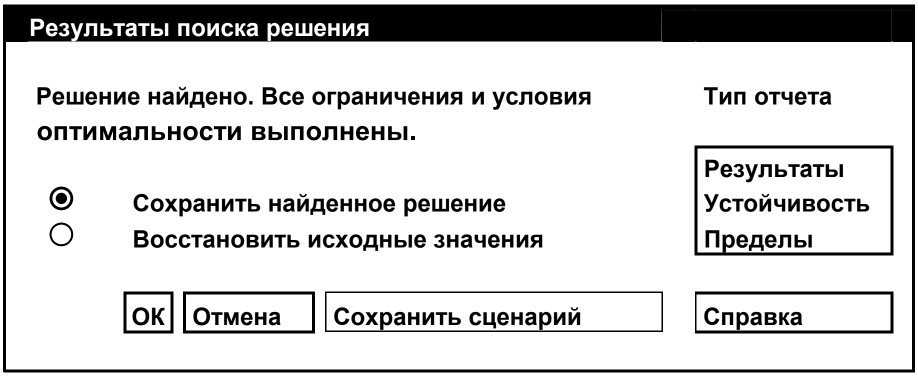


Рис. П.7. Диалоговое окно «Результаты поиска решения»

Здесь же на рабочем поле появляется диалоговое окно «Результаты поиска решения» (рис. П.7). После активирования МЛ клавиши «ОК» этого окна на экране остается рабочее поле с результатами решения (рис. П.6).

П.3. Решение задач целочисленного программирования

При учете целочисленности переменных ввод исходной информации в рабочее поле полностью аналогичен таковому предыдущей задачи. Однако в ячейки *A*20 и *B*20 для напоминания введем текстовую информацию о целочисленности переменных x_1, x_2 и x_3 (рис. П.8).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Исходные данные:**						**Переменные**	
2	Прибыль z1=	8					x1=	0
3	z2=	11					x2=	0
4	z3=	12					x3=	0
5	Ресурсы:							
6	энергия =	50					**Целевая функция**	
7	финансы =	100					Z=z1x1+x2x2+z3x3	0
8	сырье =	150						
9	Нормы расхода:							
10	по энергии a11=	2	a12=	2	a13=	3		
11	по финансам a21=	6	a22=	5,5	a23=	4		
12	по сырью a31=	4	a32=	6	a33=	8		
13	Миним. кол-во изделий	15						
14								
15	**Лев.часть ограничений**							
16	a11x1+a12x2+a13x3=	0						
17	a21x1+a22x2+a23x3=	0						
18	a31x1+a32x2+a33x3=	0						
19	x1+x2+x3=	0						
20	x1; x2; x3	целые						

Рис. П.8. Исходная информация целочисленной задачи на рабочем поле

В диалоговом окне «Поиск решения» дополнительно вводится информация о целочисленности переменных x_1, x_2 и x_3. Этой информации соответствует нижняя строка «*H*2:*H*4=целое» окна «Ограничения» (рис. П.9).

Ввод этой информации после активирования МЛ клавиши «Добавить» осуществляется через диалоговое окно «Добавление ограничения» (рис. П.10). В окно «Ссылка на ячейку» вводится массив адресов ячеек с целочисленными переменными (*H*2:*H*4). В среднем окне после активирования МЛ клавиши «▼» выбирается обозначение «цел».

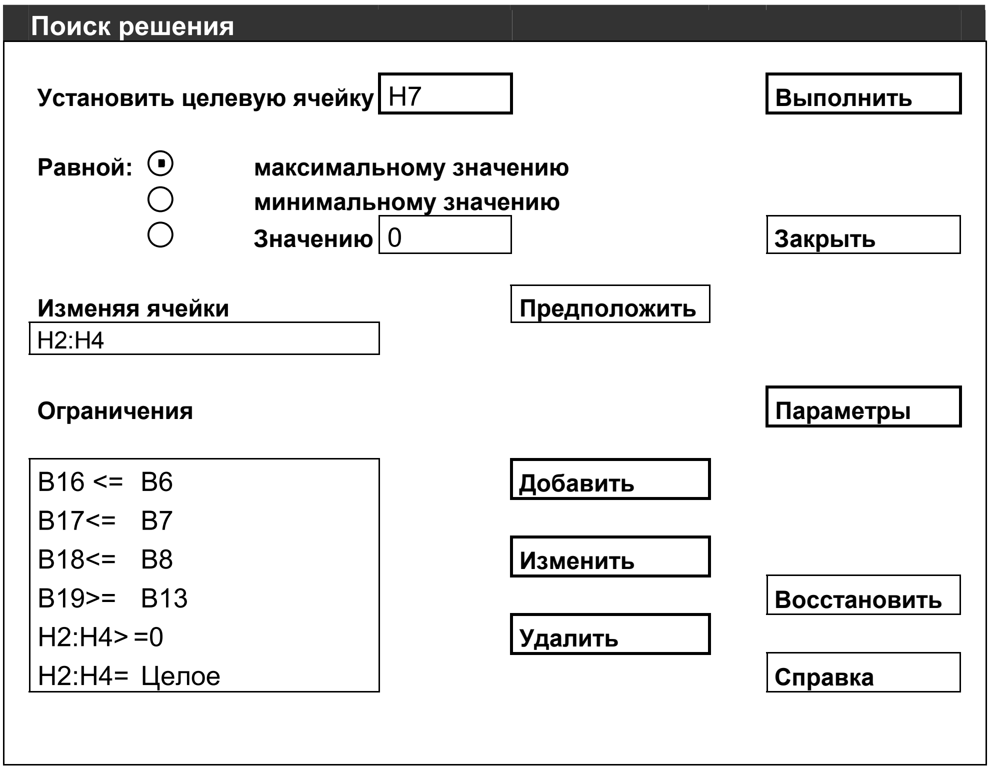


Рис. П.9. Диалоговое окно «Поиск решения» для целочисленной задачи

Рис. П.10. Диалоговое окно «Добавление ограничения» для целочисленной задачи

После возврата через клавишу «ОК» в диалоговое окно «Поиск решения» активируется МЛ клавиша «Выполнить».

Результат решения целочисленной задачи, выданный компьютером на рабочее поле, представлен на рис. П.11.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Исходные данные:**						**Переменные**	
2	Прибыль z1=	8					x1=	0
3	z2=	11					x2=	10
4	z3=	12					x3=	10
5	Ресурсы:							
6	энергия =	50					**Целевая функция**	
7	финансы =	100					Z=z1x1+x2x2+z3x3	230
8	сырье =	150						
9	Нормы расхода:							
10	по энергии a11=	2	a12=	2	a13=	3		
11	по финансам a21=	6	a22=	5,5	a23=	4		
12	по сырью a31=	4	a32=	6	a33=	8		
13	Миним. кол-во изделий	15						
14								
15	**Лев.часть ограничений**							
16	a11x1+a12x2+a13x3=	50						
17	a21x1+a22x2+a23x3=	95						
18	x31x1+a32x2+a33x3=	140						
19	x1+x2+x3=	20						
20	x1; x2; x3	целые						

Рис. П.11. Результаты решения целочисленной задачи на рабочем поле

Значения искомых переменных x_1, x_2 и x_3 находятся в ячейках *H*2, *H*3 и *H*4; максимальное значение целевой функции - в ячейке *H*7; левые части ограничений - в ячейках *B*16, *B*17, *B*18 и *B*19.

П.4. Решение задач нелинейного программирования

Ввод исходных данных и получение результатов решения задач нелинейного программирования принципиально не отличаются от таковых при решении линейных и целочисленных задач.

Рассмотрим решение оптимизационной задачи *примера 7*.

Рабочее поле ввода исходной информации показано на рис. П11. В ячейках *B*2…*B*10 находится числовая исходная информация. Искомые значения переменных Q_{k1} и Q_{k2} находятся в ячейках *F*2 и *F*3. Начальные значения этих переменных принимаются нулевыми.

Целевая функция задачи имеет вид

$$Z=z_0(Q_{k1}+Q_{k2})+ a_1(Q_1+Q_2- Q_{k1} -Q_{k2})^2 + a_2(Q_2-Q_{k2})^2 ,$$

где $a_1= R_1\, c_o\, 10^{-3}/U^2 =0{,}0006$; $a_2= R_2\, c_o\, 10^{-3}/U^2 =0{,}0004$.

В ячейку *F*7 вводится выражение для вычисления значения этой целевой функции

$= B7*(F2 + F3) + B9*(B2 + B3 - F2 - F3)\text{^}2 + B10*(B3 - F3)\text{^}2.$

В диалоговом окне «Поиск решения» (рис. П.12);
устанавливается адрес ячейки целевой функции $F7$;
отмечается, что ищется минимальное значение целевой функции;
указываются адреса ячеек с искомыми переменными $F2$, $F3$;
в качестве ограничений вводятся граничные условия неотрицательности искомых переменных $Q_{k1} \geq 0$ и $Q_{k2} \geq 0$.

	A	B	C	D	E	F
1	**Исходные данные:**				**Переменные**	
2	Q1=	600			Qk1=	0
3	Q2=	800			Qk2=	0
4	R1=	6				
5	R2=	4				
6	U=	10			**Целевая функция**	
7	z0=	0,5			Z=	1432
8	c0=	10				
9	$a1=R1\cdot c0\cdot 10^{-3}/U^2=$	0,0006				
10	$a2=R2\cdot c0\cdot 10^{-3}/U^2=$	0,0004				
11						
12	**Ограничения:**					
13	Qk1>=0					
14	Qk2>=0					
15						

Рис. П.12. Исходная информация нелинейной задачи на рабочем поле

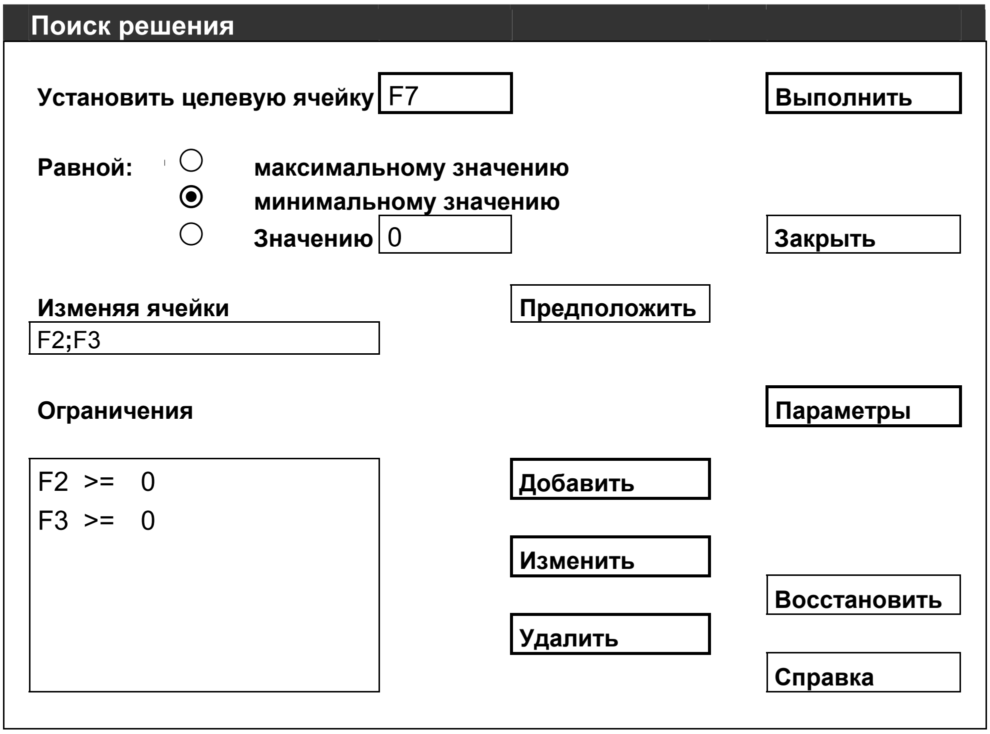


Рис. П13. Диалоговое окно «Поиск решения»

В диалоговом окне «Параметры поиска решения» следует снять флажок «**v**» с позиции «линейная модель», поскольку решается нелинейная задача.

Результат решения нелинейной задачи, выданный компьютером на рабочее поле, представлен на рис. П.14.

	A	B	C	D	E	F
1	**Исходные данные:**				**Переменные**	
2	Q1=	600			Qk1=	183,3343
3	Q2=	800			Qk2=	799,9993
4	R1=	6				
5	R2=	4				
6	U=	10			**Целевая функция**	
7	z0=	0,5			Z=	595,8333
8	c0=	10				
9	a1=R1·c0·10^{-3}/U^2=	0,0006				
10	a2=R2·c0·10^{-3}/U^2=	0,0004				
11						
12	**Ограничения:**					
13	Qk1>=0					
14	Qk2>=0					
15						

Рис. П.14. Результаты решения нелинейной задачи на рабочем поле

П.5. Решение задач дискретного программирования

Рассмотрим решение дискретной задачи *примера* 9. Рабочее поле ввода исходной информации показано на рис. П11. В ячейках *B*2…*B*8 находится числовая исходная информация. Искомые значения дискретных переменных Q_{k1}, Q_{k2} , Q_{k3} и двоичных переменных δ_1, δ_2, δ_3 находятся в ячейках *F*2… *F*7. Начальные значения всех переменных принимаются нулевыми.

Целевая функция задачи имеет вид

$$\Delta P = a_1(Q_1 + Q_2 + Q_3 - Q_{k1}\delta_1 - Q_{k2}\delta_2 - Q_{k3}\delta_3)^2 + a_2(Q_2 + Q_3 - Q_{k2}\delta_2 -$$

$$- Q_{k3}\delta_3)^2 + a_3(Q_3 - Q_{k3}\delta_3)^2,$$

где $a_1 = R_1 / U^2 = 0{,}004$;
$a_2 = R_2 / U^2 = 0{,}005$;
$a_3 = R_3 / U^2 = 0{,}006$.

В ячейку $E10$ вводится выражение для вычисления значения этой целевой функции

$$= B5*(B2+B3+B4-E2*E5-E3*E6-E4*E7)\hat{}2+B6*(B3+B4-E3*E6-E4*E7)\hat{}2+B7*(B4-E4*E7)\hat{}2$$

	A	B	C	D	E	F
1	**Исходные данные**			**Переменные**		
2	Q1=	600		Qk1=	0	
3	Q2=	500		Qk2=	0	
4	Q3=	400		Qk3=	0	
5	a1=R1/U^2=	0,004		δ1=	0	
6	a2=R2/U^2=	0,005		δ2=	0	
7	a3=R3/U^2=	0,006		δ3=	0	
8	Qk=	1000				
9				**Целевая функция**		
10	**Лев. часть ограничений**			Z=	14010	
11	δ1+δ2+δ3=	0				
12	Qk*δ1-Qk1=	0				
13	Qk*δ2-Qk2=	0				
14	Qk*δ3-Qk3=	0				
15						

Рис. П.15. Исходная информация дискретной задачи на рабочем поле

В ячейки $B11$ … $B14$ вводятся выражения для вычисления левых частей ограничений:

$=E5+E6+E7$;
$=B8\cdot E5 - E2$;
$=B8\cdot E6 - E3$;
$=B8\cdot E7$ - E4.

В диалоговом окне «Поиск решения» (рис. П.16):
устанавливается адрес ячейки целевой функции $E10$;
отмечается, что ищется минимальное значение целевой функции;
указываются адреса ячеек с искомыми переменными $E2 \ldots E7$.

Через диалоговое окно «Добавление ограничения» вводятся равенства

$B11 = 1$,
$B12 = 0$,
$B13 = 0$,
$B14 = 0$

и ограничение вида $E5{:}E7$ =двоичное.

Результат решения дискретной задачи, выданный компьютером на рабочее поле, представлен на рис. П.17.

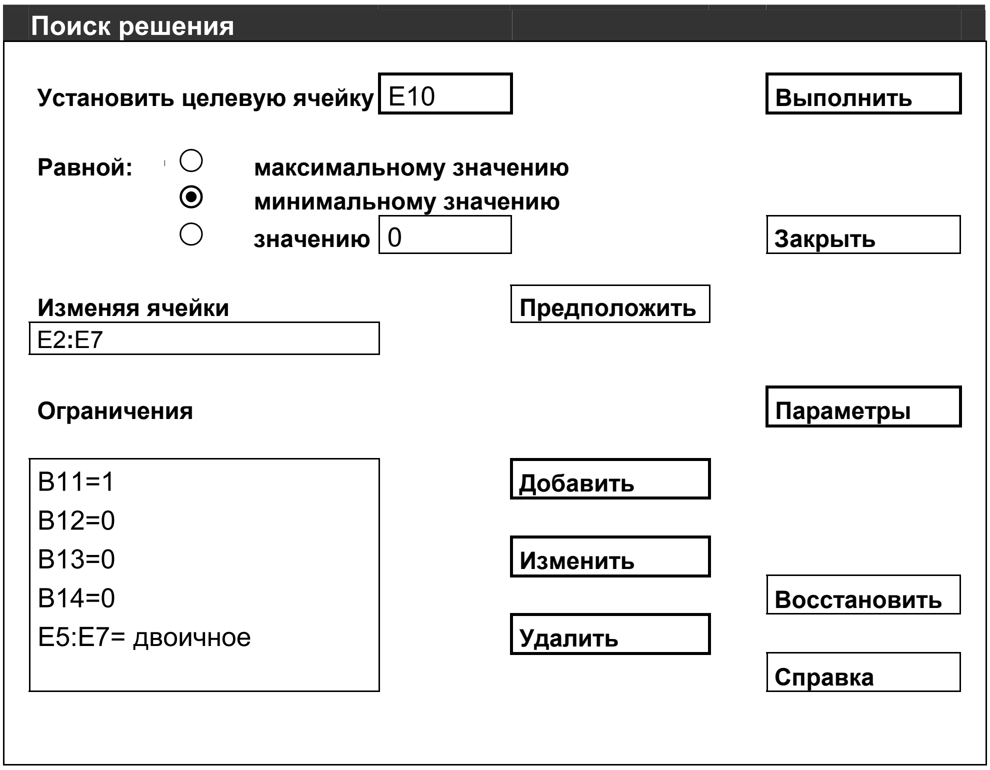


Рис. П16. Диалоговое окно «Поиск решения»

	A	B	C	D	E	F
1	**Исходные данные**			**Переменные**		
2	Q1=	600		Qk1=	0	
3	Q2=	500		Qk2=	1000	
4	Q3=	400		Qk3=	0	
5	a1=R1/U^2=	0,004		δ1=	0	
6	a2=R2/U^2=	0,005		δ2=	1	
7	a3=R3/U^2=	0,006		δ3=	0	
8	Qk=	1000				
9				**Целевая функция**		
10	**Лев. часть ограничений**			Z=	2010,0	
11	δ1+δ2+δ3=	1				
12	Qk*δ1-Qk1=	0				
13	Qk*δ2-Qk2=	0				
14	Qk*δ3-Qk3=	0				
15						

Рис. П.17. Результаты решения дискретной задачи на рабочем поле

П.6. Решение многокритериальных задач

Рассмотрим решение двухкритериальной задачи *примера* 13. Результаты решения задачи по первой целевой функции – максимальной прибыли, получены в приложении П.3 и представлены на рис. П.18. Эта целевая функция обозначена через Z_1 и ее максимальное значение находится в ячейке *H*7.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Исходные данные:**						**Переменные**	
2	Прибыль z1=	8					x1=	0
3	z2=	11					x2=	10
4	z3=	12					x3=	10
5	Ресурсы:							
6	энергия =	50					**Целевая функция**	
7	финансы =	100					Z1=z1x1+x2x2+z3x3	230
8	сырье =	150						
9	Нормы расхода:							
10	по энергии a11=	2	a12=	2	a13=	3		
11	по финансам a21=	6	a22=	5,5	a23=	4		
12	по сырью a31=	4	a32=	6	a33=	8		
13	Миним. кол-во изделий	15						
14								
15	**Лев.часть ограничений**							
16	a11x1+a12x2+a13x3=	50						
17	a21x1+a22x2+a23x3=	95						
18	a31x1+a32x2+a33x3=	140						
19	x1+x2+x3=	20						
20	x1; x2; x3	целые						

Рис. П.18. Результаты решения задачи по критерию максимальной прибыли

Результаты решения задачи по второй целевой функции – минимуму затрат энергоресурсов, представлены на рис. П.19. Подлежащая минимизации целевая функция

$$Z_2 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \to \min$$

представляет собой левую часть первого ограничения – расход энергоресурсов. Соответственно первое ограничение удалено. Также удалена, как ненужная, информация по прибыли от реализации продукции.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Исходные данные:**						**Переменные**	
2							x1=	0
3							x2=	15
4							x3=	0
5	Ресурсы:							
6							**Целевая функция**	
7	Финансы =	100					Z2= a11x1+a12x2+a13x3	30
8	сырье =	150						
9	Нормы расхода:							
10	по энергии a11=	2	a12=	2	a13=	3		
11	по финансам a21=	6	a22=	5,5	a23=	4		
12	по сырью a31=	4	a32=	6	a33=	8		
13	Миним. кол-во изделий	15						
14								
15	**Лев.часть ограничений**							
16								
17	a21x1+a22x2+a23x3=	82,5						
18	a31x1+a32x2+a33x3=	90						
19	x1+x2+x3=	15						
20	x1; x2; x3	целые						

Рис. П.19. Результаты решения задачи по критерию минимального расхода энергоресурсов

Результаты решения двухкритериальной задачи представлены на рис. П.20. Восстановлена, как необходимая, информация по прибыли от реализации продукции.

В ячейках $B14$ и $B15$ помещены значения весовых коэффициентов первой и второй целевых функций.

Подлежащая максимизации обобщенная целевая функция имеет вид

$$Z = \alpha_1(z_1x_1+z_2x_2+z_3x_3)/Z_{1\ \text{норм}} - \alpha_2(a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3)/Z_{2\ \text{норм}} \to \max.$$

Сюда входят и первая

$Z_1 = z_1x_1+z_2x_2+z_3x_3$

и вторая

$Z_2 = a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3$

целевые функции со своими весовыми коэффициентами α_1 и α_2.

Знаки перед целевыми функциями разные, поскольку первая максимизируется, а вторая минимизируется.

В ячейку *H*7 введено следующее выражение для вычисления значения обобщенной целевой функции:

$$= B14*(B2*H2 + B3*H3 + B4*H4) / 230 -$$
$$- B15*(B10*H2 + D10*H3 + F10*H4) / 30.$$

Значение обобщенной целевой функции получено в относительных единицах (о.е.), поскольку каждая целевая функция делится на ее нормирующее значение.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Исходные данные:**						**Переменные**	
2	Прибыль z1=	8					x1=	4
3	z2=	11					x2=	1
4	z3=	12					x3=	16
5	Ресурсы:							
6							**Целевая функция**	
7	финансы =	100					Z=α1(z1x1+z2x2+z3x3)/Z1-	0,28
8	сырье =	150					-α2(a11x1+a12x2+a13x3)/Z2	
9	Нормы расхода:							
10	по энергии a11=	2	a12=	2	a13=	3		
11	по финансам a21=	6	a22=	5,5	a23=	4		
12	по сырью a31=	4	a32=	6	a33=	8		
13	Миним. кол-во изделий	15						
14	α1=	0,6						
15	α2=	0,4						
16	**Лев.часть ограничений**							
17	a21x1+a22x2+a23x3=	93,5						
18	a31x1+a32x2+a33x3=	150						
19	x1+x2+x3=	21						
20	x1; x2; x3	Целые						

Рис. П.20. Результаты решения двухкритериальной задачи

Предметный указатель

Оглавление

Костин Владимир Николаевич

Оптимизационные задачи электроэнергетики

Учебное пособие

Редактор И.Н. Садчикова

Сводный темплан 2003 г.
Лицензия ЛР №020308 от 14.02.97

Подписано в печать Формат 60х84 1/16.

Б.кн.-журн. П.л. 7,5 Б.л. 3,75 РТП РИО СЗТУ

Тираж 100 Заказ

Северо-Западный государственный заочный технический университет
РИО СЗТУ, член Издательско-полиграфической ассоциации вузов Санкт-Петербурга
191186, Санкт-Петербург, ул. Миллионная, 5.

Министерство образования Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
Северо-Западный государственный заочный технический университет

В.Н. Костин

Оптимизационные задачи электроэнергетики

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2003