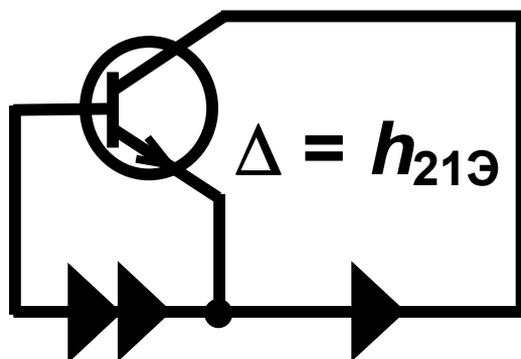


С. А. Курганов, В. В. Филаретов

АНАЛИЗ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ
ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
МЕТОДОМ
СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ



Министерство образования Российской Федерации
Ульяновский государственный технический университет

С. А. Курганов, В. В. Филаретов

АНАЛИЗ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ
ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
МЕТОДОМ
СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Учебное пособие

Ульяновск 2002

УДК 621.372.061 (076)

ББК

К93

Курганов С. А., Филаретов В. В. Анализ установившихся режимов линейных электрических цепей методом схемных определителей: Учебное пособие.– Ульяновск: УлГТУ, 2002.– 148 с.

Излагаются основы метода схемных определителей, который предназначен для получения символьных схемных (системных) функций электрических цепей непосредственно по схеме замещения или принципиальной схеме без составления уравнений. Метод распространяется как на линейные схемы с двухполюсными элементами, так и на линеаризованные активные (электронные) схемы.

Главная цель пособия – помочь студенту освоить символьный анализ линейных электрических цепей и научиться решать практические задачи, требующие исследования функций цепей. В пособии приведены многочисленные примеры решения задач и варианты заданий для проведения практических занятий и выполнения расчетно-графических работ.

Пособие предназначено для студентов, изучающих теоретические основы электротехники (специальности 180400 «Электропривод и автоматизация промышленных установок», 100400 «Электроснабжение»), основы теории цепей (специальность 200700 «Радиотехника»), электротехнику и электронику (специальность 071900 «Информационные системы и технологии»), и преподавателей, ведущих указанные дисциплины. Учебное пособие может использоваться также студентами других радио- и электротехнических специальностей.

Рецензенты:

Кафедра микроэлектроники Ульяновского государственного университета (зав. кафедрой доктор физико-математических наук, профессор Н. Т. Гурин); кандидат технических наук, старший научный сотрудник А. И. Зарукин.

Утверждено редакционно-издательским советом университета
в качестве учебного пособия

© Ульяновский государственный технический университет, 2002

© Курганов С.А., Филаретов В.В., 2002

ОГЛАВЛЕНИЕ

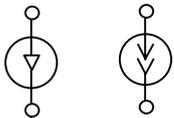
Список условных сокращений и обозначений.....	5
ВВЕДЕНИЕ.....	7
1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ	10
<i>(Филаретов В.В.)</i>	
1.1. Общие понятия и определения.....	10
1.2. Физические основы метода схемных определителей.....	14
1.2.1. Законы Кирхгофа.....	14
1.2.2. Вырождение схемы и нейтрализация элементов.....	15
1.2.3. Эквивалентные упрощения электрических схем.....	17
1.3. Разложение определителей схем	
по параметрам пассивных элементов и подсхем	19
1.3.1. Определители простейших схем.....	19
1.3.2. Выделение параметров пассивных элементов.....	20
1.3.3. Выделение подсхем	23
1.3.4. Метод схемных миноров	24
1.3.4.1. Деление схемы на две части по трем узлам	25
1.3.4.2. Общий случай деления на подсхемы	26
1.3.4.3. Деление схемы на две части по четырем узлам	27
1.3.4.4. Объединение подсхем	28
1.4. Выражение ССФ через схемные определители	31
1.5. Примеры формирования ССФ для схем	
с двухполюсными элементами.....	33
1.5.1. Простейший делитель напряжения.....	33
1.5.2. Сглаживающий фильтр	33
1.5.3. Мост Уитстона.....	35
1.5.4. Полосовой RC-фильтр.....	35
1.5.5. Анализ электрических схем	
с несколькими независимыми источниками	37
1.6. Выделение параметров УИ и НУИ	38
1.6.1 Выделение параметров УИ.....	38
1.6.2 Выделение параметров НУИ.....	40
1.7. Примеры формирования ССФ для схем с УИ	42
1.7.1. Анализ уз-схемы с ИТУН.....	42
1.7.2. Анализ уз-схемы с ИТУТ и ИНУН.....	46
1.8. Алгоритм формирования схемных определителей.....	48
1.9. О взаимосвязи схемного и матричного определителей	50

2. МЕТОД СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ В ТАБЛИЦАХ И РИСУНКАХ	56
<i>(Курганов С.А., Филаретов В.В.)</i>	
2.1. Методические указания по освоению МСО	56
2.2. Схемно-алгебраические формулы схемных функций	79
2.3. Эквивалентные преобразования и упрощения схем	79
2.4. Определители простейших схем	84
2.5. Нейтрализация элементов и вырождение схем	84
2.6. Преобразование определителей схем с НУИ	86
2.7. Формулы выделения параметров базовых элементов и следствия этих формул	87
2.8. Формулы деления схем на части	89
2.9. Формулы выделения параметров элементов принципиальных схем	91
3. ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ	94
<i>(Курганов С.А.)</i>	
3.1. Электрические цепи при постоянном воздействии	94
3.1.1. Постановка задачи	94
3.1.2. Пример решения задачи	97
3.2. Электрические цепи при гармоническом воздействии	101
3.2.1. Постановка задачи	101
3.2.2. Пример решения задачи	104
3.3. Частотные характеристики цепей первого порядка	108
3.3.1. Постановка задачи	108
3.3.2. Пример решения задачи	111
3.4. Колебательные контуры	114
3.4.1. Постановка задачи	115
3.4.2. Пример решения задачи	117
3.5. Цепи с взаимными индуктивностями	112
3.5.1. Постановка задачи	122
3.5.2. Пример решения задачи	125
3.6. Цепи с идеальными трансформаторами	130
3.6.1. Постановка задачи	130
3.6.2. Пример решения задачи	133
3.7. Цепи с операционными усилителями	137
3.7.1. Постановка задачи	137
3.7.2. Пример решения задачи	140
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	145
Предметный указатель	146
Библиографический список	147

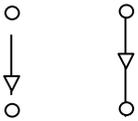
СПИСОК УСЛОВНЫХ СОКРАЩЕНИЙ И ОБОЗНАЧЕНИЙ

АЧХ	амплитудно-частотная характеристика
ГН	генератор напряжения
ГНУИ	генератор неудаляемого управляемого источника
ГТ	генератор тока
ДВ	двоичный вектор
ДЛ	длинная линия
ИНУН	источник напряжения, управляемый напряжением
ИНУТ	источник напряжения, управляемый током
ИТУН	источник тока, управляемый напряжением
ИТУТ	источник тока, управляемый током
КСПН	конвертор сопротивления с преобразованием напряжения
КСПТ	конвертор сопротивления с преобразованием тока
КЧФ	комплексная частотная функция
МСО	метод схемных определителей
НУИ	неудаляемый управляемый источник
НЭМ	неудаляемый элемент матрицы
ОУ	операционный усилитель
ПН	приемник напряжения
ПНУИ	приемник неудаляемого управляемого источника
ПТ	приемник тока
ССФ	символьная схемная (системная) функция
УИ	управляемый источник
ФЧХ	фазо-частотная характеристика
САВ	схемно-алгебраическое выражение
САФ	схемно-алгебраическая формула
ЭДС	электродвижущая сила
$e, e(t)$	мгновенное значение ЭДС
$j, j(t)$	мгновенное значение функции источника тока
E	действующее (постоянное) значение ЭДС
J	действующее (постоянное) значение функции источника тока
$u, u(t)$	мгновенное значение напряжения
$i, i(t)$	мгновенное значение тока
I, U	действующие (постоянные) значения тока и напряжения
I_m, U_m	амплитуды тока и напряжения
E_m, J_m	амплитуды ЭДС и функции источника тока
j	мнимая единица $j = \sqrt{-1}$
ω	циклическая (круговая) частота

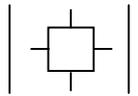
p	оператор дифференцирования ($p=d/dt$) или комплексный оператор ($p=j\omega$)
$E(p), J(p)$	операторные выражения ЭДС и функции источника тока
$U(p), I(p)$	операторные выражения напряжения и тока
$\underline{E}, \underline{J}$	комплексные действующие значения ЭДС и функции источника тока
$\underline{U}, \underline{I}$	комплексные действующие значения напряжения и тока
$\underline{E}_m, \underline{J}_m$	комплексные амплитудные значения ЭДС и функции источника тока
$\underline{U}_m, \underline{I}_m$	комплексные амплитудные значения напряжения и тока
Z, Y	комплексные сопротивление и проводимость
$Z(p), Y(p)$	операторные сопротивление и проводимость
$\underline{K}, \underline{\beta}$	комплексные коэффициенты передачи напряжения и тока



независимые источники ЭДС и тока



приемники напряжения и тока (вольтметр и амперметр)



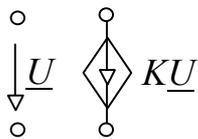
определитель схемы (многополюсника)



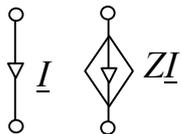
генератор неудаляемого управляемого источника (ГНУИ)



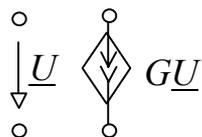
приемник неудаляемого управляемого источника (ПНУИ)



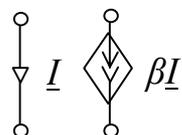
источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН)



источник напряжения, управляемый током (ИНУТ)



источник тока, управляемый напряжением (ИТУН)



источник тока, управляемый током (ИТУТ)

*Посвящается
Вильгельму Фойснеру и Яромиру Брауну*

ВВЕДЕНИЕ

В 1845 году Кирхгоф, будучи студентом, опубликовал законы непрерывности токов в узле и равновесия напряжений в контуре электрической схемы [1]. С этого времени появилась возможность выполнять анализ сложных электрических цепей, решая систему уравнений схемы методом Крамера, то есть через раскрытие определителей двух матриц. Однако и Кирхгоф (1847 г.) [1], и Максвелл (1873 г.) [2], очевидно, сознавая избыточность и абстрагированность матричного подхода, делали попытки разработать прямой метод анализа электрических цепей, исключающий составление уравнений и использующий непосредственно схемную модель цепи. Тем самым ставилась задача сделать переход от схемы к ее символьным схемным функциям (ССФ), применяемым для расчета токов и напряжений, более простым и обусловленным структурой самой схемы.

Результаты Кирхгофа и Максвелла получили развитие в работах Фойснера [3–6], который в 1902 году ввел понятие определителя схемы с двухполюсными элементами. Результаты Фойснера получили развитие в работах Брауна [7] и Хуана [8]. Наиболее подробно методы Кирхгофа, Максвелла, а также метод Фойснера, называемый здесь методом схемных определителей, рассмотрены в учебнике [9]. В 1965 году Браун ввел понятие ориентированного нуллора, что позволило выразить схемные функции через определители схем с нораторами и нуллаторами, а также применить формулы Фойснера для анализа схем, содержащих идеальные операционные усилители (ОУ). Идеальный ОУ можно рассматривать как «некий источник, ток и напряжение на входе которого одновременно равны нулю при любых конечных значениях напряжения и тока на выходе» [20, с. 434]. В последние годы метод схемных определителей был усовершенствован и обобщен для анализа схем со всеми типами управляемых источников [10–13], аналитического решения систем линейных алгебраических уравнений произвольной физической природы [14], а также символьного решения задачи диагностики электрических цепей [15]. При подготовке пособия использовались также учебники [16, 18–20], монографии [17, 21, 22] и ГОСТ 19880–74 «Электротехника. Основные понятия: Термины и определения».

Задачами учебного пособия являются:

1. Сосредоточить внимание и усилия студентов на постижении физического смысла изучаемых явлений, исключив трудоемкое использование вспомогательных математических аппаратов (матриц, графов и др.), а также методов решения линейных алгебраических уравнений (Крамера, Гаусса и т.д.).

2. Предоставить в распоряжение студентов наглядный и эффективный инструмент для аналитического и численного исследования электрических цепей, который расширяет возможности аналитического представления зависимостей в курсе теоретических основ электротехники и смежных дисциплинах, способствует формированию критического отношения к учебной и справочной литературе.

3. Осуществить попытку изложения раздела ТОЭ «Анализ линейных электрических цепей» на собственно схемной основе, то есть ориентируясь на физические схемные представления.

При анализе схем используются так называемые схемно-алгебраические выражения или, просто, схемные выражения, в которых, наряду с буквенными обозначениями параметров схемы и знаками операций, используются изображения производных схем, отождествляемые с их определителями. В таких выражениях в качестве знака умножения используется знак « * ». Применение схемных выражений и уравнений на первый взгляд кажется непривычным, однако позволяет сделать процесс решения более наглядным, а также обеспечивает сокращение объема выкладок, поскольку определители производных схем с 2–3 узлами легко запоминаются.

Учебное пособие состоит из трех разделов.

В первом разделе рассматриваются базовые понятия теории электрических цепей, вводится понятие схемного определителя, обсуждаются признаки вырождения схемы, удаление, стягивание и нейтрализация ее элементов. Вводится понятие неудаляемого управляемого источника (НУИ), обобщающее понятие ориентированного нуллора, и формулируются схемные выражения для нахождения ССФ. Выводятся формулы Фойснера для разложения определителя схемы путем выделения параметров пассивных элементов и приведения задачи к разложению определителей более простых производных схем. Для анализа сложных схем предлагается метод схемных миноров, предусматривающий задание внешних параметров подсхем двоичными векторами. Рассматриваются примеры анализа электрических схем, составленных из двухполюсных элементов.

Обсуждается обобщение метода схемных определителей для анализа схем с управляемыми источниками (УИ). Выводятся формулы для разложения определителя схемы путем выделения параметра УИ и приведения задачи к разложению определителей двух более простых производных схем. Первая производная схема получается преобразованием выделяемого УИ в НУИ, а вторая – нейтрализацией выделяемого УИ. Ориентация УИ сохраняется в ориентации НУИ и выделяемый параметр всегда положителен. При

необходимости параметру НУИ вместо значения, равного единице, можно присвоить значение, равное выделяемому параметру. В этом случае определитель исходной схемы представляется в виде суммы определителей первой и второй производных схем. Это отличает НУИ от обычного нуллора и ориентированного нуллора [7], которые сами по себе не имеют параметров, а моделируют операционный усилитель (ОУ) с коэффициентом усиления, равным бесконечности. Рассматриваются правила выделения НУИ, позволяющие свести задачу разложения определителя схемы с НУИ к более простой задаче выделения двухполюсных элементов. Даются примеры анализа схем с УИ всех четырех типов и идеальными ОУ.

Во втором разделе помещен краткий обзор наглядных формул – схемно-алгебраических выражений и уравнений, который может служить своеобразной «шпаргалкой», облегчающей усвоение и использование метода схемных определителей. Приводятся наброски доказательств основных формул. Метод выделения параметров двухполюсников и управляемых источников обобщается для трех- и четырехполюсных взаимных и невзаимных элементов: взаимных индуктивностей, идеальных трансформаторов, гираторов, конверторов, инверторов, биполярных, полевых и составных транзисторов, длинных линий и т. д.

В третьем разделе предлагаются варианты задач для решения на практических занятиях или в качестве заданий для расчетно-графических работ. Даются примеры решения типовых задач.

Для контроля своих решений – сформированных ССФ студенты могут использовать программу **CIRSYM**, в которой В. В. Филаретов реализовал метод схемных определителей, а также программу **CALCSYM** для интерпретации сложных выражений ССФ, разработанную Д. В. Шеиным и полезную при численном расчете токов, напряжений, частотных характеристик и т. д. Загрузочные модули указанных программ и инструкции по работе с ними размещены на Интернет-сайте <http://astrometric.sai.msu.ru/~symbol/>. Программа **CIRSYM** использует стандартный cir-формат (Pspice-DesignLab) для описания схем и в отличие от известных программ обеспечивает вывод выражений схемных функций, близких к оптимальным выражениям по вычислительной сложности, и выражений без взаимно уничтожающихся слагаемых. Кроме непосредственного учета всех типов УИ, предусматривается задание двухполюсных элементов как проводимостями, так и сопротивлениями, а также смешанное задание параметров. Это исключает сложные преобразования выражений ССФ и обеспечивает экономию интеллектуального труда.

1. ОСНОВЫ ТЕОРИИ СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1.1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Электрической цепью называется совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитные процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об электродвижущей силе (ЭДС), токе и напряжении. В теоретической электротехнике обычно имеют дело со *схемой замещения* электрической цепи или просто *электрической схемой*, которая отображает свойства цепи при определенных условиях.

Электрическая схема содержит элементы, выполняющие в ней некоторые функции. Во многих случаях схема состоит только из двухполюсных элементов или двухполюсников, то есть элементов, имеющих со схемой две точки соединения. Такие элементы называются *ветвями* электрической схемы с указанием их функционального назначения. Место соединения двух и более ветвей называется *узлом*.

Возможны случаи, когда ветвь подсоединяется к схеме только одним полюсом или обоими полюсами, но к одному узлу схемы. В первом случае ветвь называется *разомкнутой ветвью*, а во втором случае – *замкнутой ветвью* или *петлей*.

Подмножества ветвей схемы могут образовывать контуры и сечения. *Контуром* схемы называется замкнутая непрерывная последовательность ветвей, в которой любой узел встречается только один раз. *Сечение* или *обобщенный узел* схемы – это подмножество ее ветвей, в результате удаления которых схема распадается на две или более частей – *подсхем*. Под удалением ветви понимается отсоединение обоих ее полюсов от схемы. В простейшем случае сечение образуют ветви, примыкающие к одному из узлов схемы. Удаление этих ветвей делит схему на две подсхемы, одна из которых является *отдельным (изолированным) узлом*.

Элементы электрической схемы подразделяются на *активные* и *пассивные* элементы. Активными элементами являются *генераторы напряжения* (ЭДС) и *генераторы тока*, соответственно, *e*- и *j*-ветви. ЭДС *e* генератора напряжения не зависит от протекающего через него тока, а ток *j* генератора тока не зависит от напряжения на его полюсах. Если ЭДС генератора напряжения и ток генератора тока не зависят также от токов или напряжений других ветвей схемы, то такие генераторы называются *независимыми (неуправляемыми) источниками* и служат источниками энергии в схеме.

Независимость *e* от протекающего через генератор ЭДС тока требует, чтобы внутреннее сопротивление генератора ЭДС было равно нулю. Аналогично этому неизменность *j* достигается в случае, когда внутреннее сопротивление генератора тока принимает бесконечно большое значение.

В соответствии с физическим смыслом ориентация генератора ЭДС указывается непрерывной (замкнутой) стрелкой, а ориентация генератора тока – двойной (разомкнутой) стрелкой, как показано на рис. 1.1.1, где $u=e$. При этом условно положительное направление напряжения u на генераторе ЭДС противоположно ориентации ЭДС, а ориентация генератора тока совпадает с направлением вызванного им тока i , равного j .



Рис. 1.1.1. Независимые источники напряжения и тока

Подсоединение к схеме генераторов напряжения и тока обуславливает напряжения, приложенные к другим элементам схемы и токи, протекающие через эти элементы. Чтобы измерить напряжение на некотором элементе схемы параллельно этому элементу подключается *вольтметр – приемник напряжения*, внутреннее сопротивление которого имеет бесконечно большое значение. В соответствии с этим приемник напряжения обозначается стрелкой, которая не касается узлов подсоединения выбранного элемента, как показано на рис. 1.1.2 (см. также рис. 1.1.1). Для измерения тока, протекающего через элемент схемы, последовательно с этим элементом включается *амперметр – приемник тока*, внутреннее сопротивление которого равно нулю. Обозначение приемника тока также приведено на рис. 1.1.2.



Рис. 1.1.2. Приемники напряжения и тока

К пассивным элементам электрической схемы относятся z - и y -ветви, которые характеризуются соответственно *сопротивлением* и *проводимостью*, измеряемыми в омах [Ом] и сименсах [См]. Сопротивление и проводимость называются *параметрами z - и y -ветвей*. Электрическая схема является линейной, если параметры ее ветвей не зависят от напряжений и токов схемы. Инвариантная во времени электрическая схема имеет параметры, независимые от времени. Условно положительное направление напряжения на z - и y -ветвях принимается совпадающим с направлением протекающего через них тока.

Пассивные элементы могут быть элементами рассеивающими (преобразующими в тепло и другие виды энергии) или накапливающими энергию электромагнитного поля. Параметры z - и y -ветвей, рассеивающих энергию, являются вещественными числами и называются соответственно *резистивным сопротивлением R* и *резистивной проводимостью G* . Эти

параметры связаны с током, протекающим через элемент, и напряжением, падающим на элементе схемы, по закону Ома

$$u = Ri \quad \text{и} \quad i = Gu, \quad (1.1.1)$$

что иллюстрирует рис. 1.1.3.



Рис. 1.1.3. Резистивные сопротивление и проводимость

Параметр z -ветви, накапливающей энергию магнитного поля, называется *индуктивным сопротивлением* и задается в операторной форме как pL . Здесь p – оператор дифференцирования или при установившемся гармоническом режиме *комплексный оператор* $j\omega$, а L – индуктивность z -ветви. Параметр y -ветви, характеризуемой емкостью C и накапливающей энергию электрического поля, называется *емкостной проводимостью* и задается в операторной форме как pC .

Операторная форма индуктивного сопротивления и емкостной проводимости вытекает из фундаментальных соотношений между мгновенными напряжением и током для индуктивности и емкости, $u(t) = L di(t)/dt$ и $i(t) = C du(t)/dt$. Формально заменив d/dt оператором дифференцирования p , и перейдя к операторным изображениям напряжений и токов, получаем уравнения

$$U(p) = pLI(p) \quad \text{и} \quad I(p) = pCU(p), \quad (1.1.2)$$

которые иллюстрирует рис. 1.1.4.

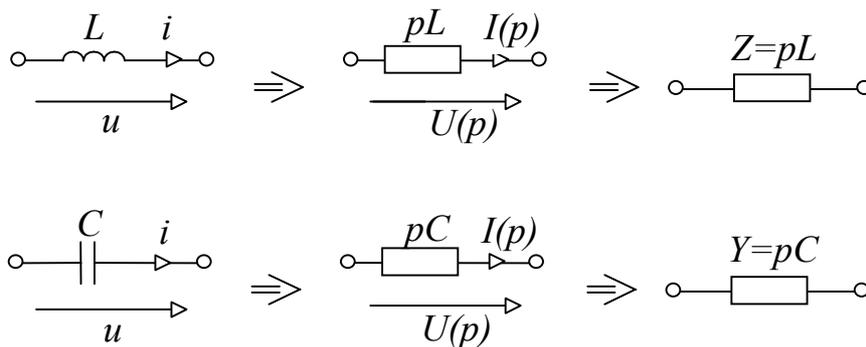


Рис. 1.1.4. Реактивные сопротивление и проводимость

Следует отметить, что метод схемных определителей не требует указания на схеме условно положительных направлений токов и напряжений (см. рис. 1.1.3 и рис. 1.1.4), если эти токи и напряжения не являются *искомыми* или *управляющими*.

Наряду с перечисленными выше элементами электрическая схема может содержать соединительные проводники – *короткозамкнутые ветви*,

сопротивление которых равно нулю. Соединительные проводники отличаются от приемников тока тем, что ток в этих проводниках не представляет интереса, поскольку не является искомым и не управляет генераторами напряжения или тока.

Искомыми обычно являются не все, а только некоторые напряжения и токи схемы. Во многих практически важных случаях электрическая схема рассматривается относительно двух пар своих полюсов, как *четырёхполюсник* (2×2 -полюсник). При этом первая пара полюсов является *входом*, к которому подключается источник воздействия (генератор напряжения или тока), а со второй пары полюсов, являющейся *выходом*, снимается реакция (отклик) схемы на данное воздействие. Для этого к выходу схемы подсоединяется приемник напряжения или тока.

Отношение значения реакции электрической схемы к заданному значению воздействия, выраженное через параметры элементов схемы, называется *символьной схемной функцией* (ССФ). Численное значение ССФ получается в результате подстановки вместо обозначений параметров их вещественных или комплексных значений. В зависимости от вида реакций и источников воздействия, а также их расположения, различают шесть типов ССФ. Данные выше определения иллюстрирует рис. 1.1.5, где токи, напряжения, ЭДС представлены действующими (комплексными) значениями.

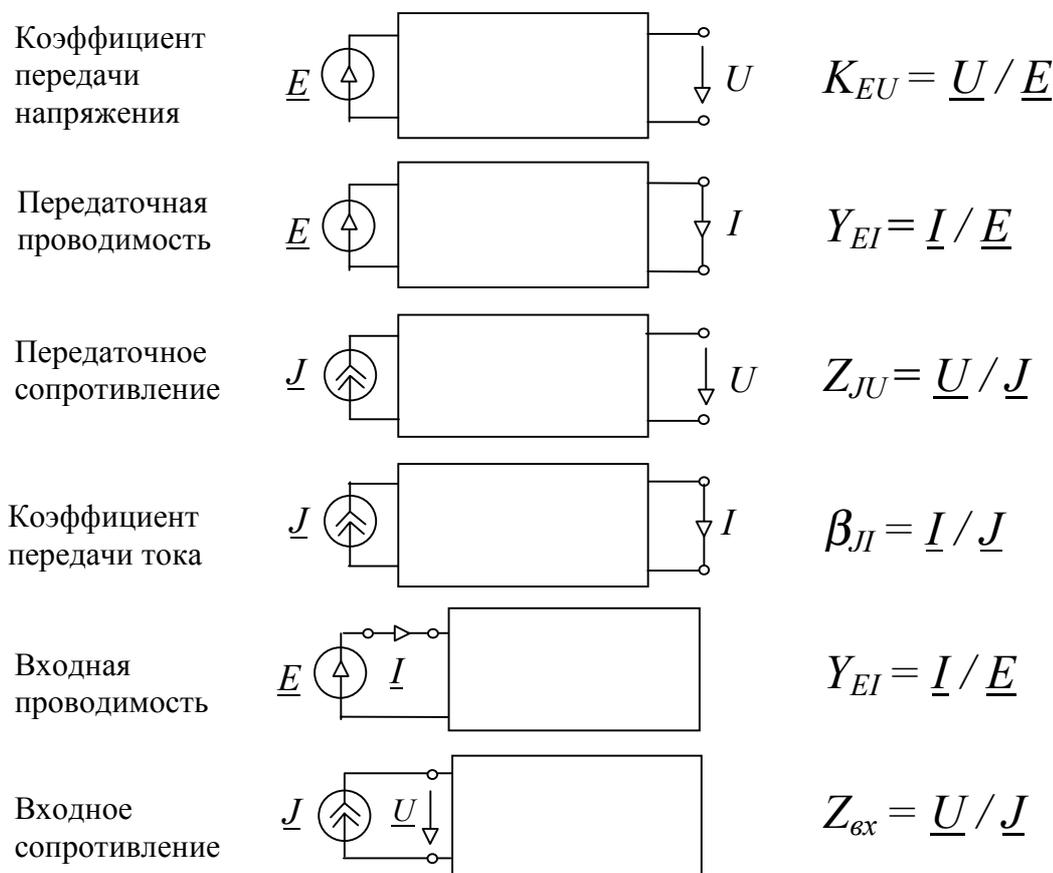


Рис. 1.1.5. Передаточные и входные ССФ

Передаточные ССФ по напряжению и току не имеют размерности, а *передаточные сопротивление и проводимость* имеют размерность соответственно сопротивления и проводимости. В частных случаях, когда четырехполюсник рассматривается относительно одной пары своих полюсов, говорят о ССФ *входного сопротивления* или ССФ *входной проводимости*.

1.2. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ МЕТОДА СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

1.2.1. Законы Кирхгофа

В фундаменте теории электрических цепей лежат законы Кирхгофа. Первый закон устанавливает непрерывность токов ветвей, сходящихся в узле или, в общем случае, образующих сечение v ,

$$\sum_{k \in v} (\pm I_k) = \sum_{n \in v} (\pm J_n), \quad (1.2.1)$$

где $\pm I_k$ – ток k -й ветви, втекающий (со знаком «плюс») в сечение v или вытекающий (со знаком «минус») из этого сечения; $\pm J_n$ – ток n -го генератора тока, втекающий (со знаком «минус») в сечение v или вытекающий (со знаком «плюс») из этого сечения.

Второй закон Кирхгофа устанавливает равновесие напряжений в контуре ρ , образованном ветвями схемы

$$\sum_{k \in \rho} (\pm U_k) = \sum_{n \in \rho} (\pm E_n), \quad (1.2.2)$$

где $\pm U_k$ – напряжение k -й ветви, учитываемое со знаком «плюс», если ее ориентация совпадает с произвольно выбранным направлением обхода контура ρ ; $\pm E_n$ – ЭДС n -го генератора напряжения, учитываемое со знаком «плюс», если ориентация этого генератора совпадает с направлением обхода контура. В противном случае перед U_k и E_n ставится знак «минус». Правила выбора знаков правых частей в уравнениях (1.2.1) и (1.2.2) согласуются с рис. 1.1.1.

Уравнения (1.2.1) и (1.2.2) совместно с компонентными уравнениями (1.1.1) и (1.1.2) позволяют составить *систему линейно независимых уравнений*, описывающих поведение схемы. Решение полученной системы, то есть вычисление каждого из искомых напряжений и токов ветвей, записывается по методу Крамера в виде отношения двух определителей, представляющего ССФ того или иного типа. При этом знаменатель решения является общим знаменателем для всех ССФ и называется *опредлителем системы уравнений* или *системным определителем*. Числители ССФ будут различными в зависимости от типа источников воздействия и искомых откликов, а также расположения рассматриваемых входов и выходов схемы.

Представляя системный определитель в операторной форме как полином от оператора p и приравнявая этот полином к нулю, получаем *характеристическое уравнение* схемы. Корни характеристического уравнения позволяют записать свободную составляющую переходного процесса в схеме, выполнить оценку ее устойчивости и т. д.

Принципиально важно уметь находить характеристическое уравнение схемы и ее ССФ, используя непосредственно электрическую схему и минуя построение системы уравнений с последующим алгебраическим решением. Это позволит не только сократить трудоемкость выкладок, но и сделать решение более компактным, избежав вычисления знаков и появления взаимно уничтожающихся слагаемых – *дубликаций*, что присуще алгебраическому методу раскрытия определителей. Центральным понятием излагаемого ниже нового метода нахождения ССФ является понятие определителя схемы или схемного определителя.

1.2.2. Вырождение схемы и нейтрализация элементов

Для обоснования метода схемных определителей используем связь определителя схемы с системным определителем. Здесь и далее в качестве определителей будем рассматривать *символьные* определители, то есть аналитические выражения, в которых все параметры схемы представлены символами, а не числами. В системном определителе (матрице) возможно появление строк, которые состоят из элементов, равных нулю. Соответствующая этому определителю схема называется вырожденной. Таким образом, определитель вырожденной схемы тождественно равен нулю. Во избежание излишних выкладок необходимо уметь устанавливать вырожденность схемы непосредственно по ее структуре и составу элементов.

С физической точки зрения вырожденной является схема, в которой развиваются бесконечно большие токи и напряжения или значения токов и напряжений оказываются неопределенными. Так, внутренние сопротивления генератора напряжения и приемника тока равны нулю, поэтому в контуре, содержащем только генераторы напряжения и приемники тока, создается бесконечно большой ток. С другой стороны, внутренние проводимости генератора тока и приемника напряжения равны нулю, поэтому на элементах сечения, образованного только генераторами тока и приемниками напряжения появляются бесконечно большие значения напряжений.

Частными случаями контура и сечения являются соответственно петля и разомкнутая ветвь. Случаи вырождения схемы при образовании петель и разомкнутых ветвей отражены в табл. 1.2.1.

Как видно, замыкание и размыкание z - и y -ветвей не может привести к вырождению схемы. Действительно, z -ветвь можно представить в виде последовательного соединения генератора напряжения и приемника тока, а y -ветвь – в виде параллельного соединения генератора тока и приемника

напряжения. Эти преобразования показаны на рис. 1.2.1. Генератор напряжения управляется током приемника тока, а генератор тока – напряжением приемника напряжения. Таким образом, в первом случае имеем дело с источником напряжения, управляемым током (ИНУТ), а во втором случае – с источником тока, управляемым напряжением (ИТУН). Стрелки генераторов управляемых источников (УИ) в отличие от стрелок независимых источников заключаются не в кружок, а в ромбик.

Таблица 1.2.1. Условия вырождения схемы и нейтрализации элементов при замыкании и размыкании ветвей

Элемент схемы	Петля	Разомкнутая ветвь
y -ветвь	Нейтрализация	Выделение y
z -ветвь	Выделение z	Нейтрализация
Генератор \underline{E}	Вырождение	Нейтрализация
Приемник \underline{I}	Вырождение	Нейтрализация
Генератор \underline{J}	Нейтрализация	Вырождение
Приемник \underline{U}	Нейтрализация	Вырождение
Генератор НУИ	Вырождение	Вырождение
Приемник НУИ	Вырождение	Вырождение

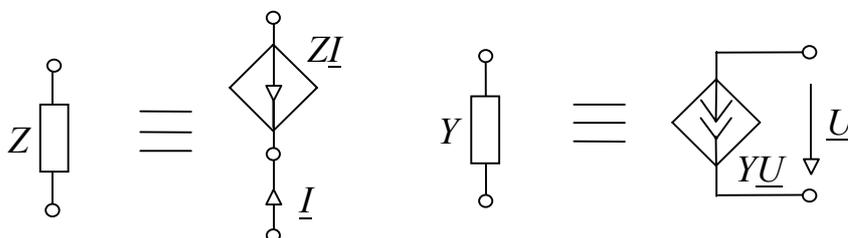


Рис. 1.2.1. Замещение пассивных элементов управляемыми источниками

Случаи вырождения схем, содержащих УИ, при наличии в этих схемах EI -контуров и JU -сечений заслуживают специального рассмотрения. Следует отметить, что наличие в схеме контура, содержащего только генераторы напряжения и приемники тока, или сечения, образованного только генераторами тока и приемниками напряжения, не указывает на ее вырождение. Действительно, в отличие от параметров независимых источников, параметры УИ учитываются в левых частях уравнений (1.2.1) и (1.2.2), и поэтому системный определитель не включает строки или столбцы из элементов, равных нулю. Случаи вырождения схем с УИ отображены в табл. 1.2.2.

Неопределенным является значение тока в контуре, образованном приемниками тока. Действительно, включение в такой контур генератора напряжения с $\underline{E}=0$ приводит по закону Ома к неопределенности вида $0/0$, так как сумма сопротивлений контура равна нулю. Аналогично этому невозможно

определить напряжения на элементах сечения, образованном приемниками напряжения, поскольку включение в такое сечение генератора тока $\underline{J}=0$ обуславливает неопределенность вида $0/0$.

Таблица 1.2.2. Следствия параллельного и последовательного соединения элементов схемы

Элемент схемы	Соединение элемента			
	параллельное		последовательное	
	с ГН или ГНУИ	с ПТ или ПНУИ	с ГТ или ГНУИ	с ПН или ПНУИ
Проводимость (у – ветвь)	Удаление		Стягивание-выделение	
Сопротивление (z - ветвь)	Удаление-выделение		Стягивание	
Генератор напряжения (ГН)	Вырождение	НУИ	Стягивание	
Приемник тока (ПТ)	НУИ	Вырождение		Стягивание
Генератор тока (ГТ)	Удаление		Вырождение	НУИ
Приемник напряжения (ПН)		Удаление	НУИ	Вырождение
Генератор НУИ (ГНУИ)	Вырождение		Вырождение	
Приемник НУИ (ПНУИ)		Вырождение		Вырождение

Наиболее часто встречающимся случаем вырождения является случай, когда схема распадается на несколько (две и более) подсхем. Формально такую схему можно представить в виде связной схемы, если соединить ее подсхемы генераторами тока с $J=0$. Полученная схема является вырожденной вследствие наличия сечений, образованных только генераторами тока.

Рассмотренные выше признаки вырождения (наличие EI -контуров, JU -сечений, несвязность схемы) должны отсутствовать у схем, подлежащих дальнейшему анализу. В противном случае задача анализа электрической схемы является тривиальной или некорректно поставленной. Следует отметить, что исходная схема также должна быть связной. Если схема несвязна, например, схема трансформаторного усилителя, то необходимо объединить два узла, принадлежащих разным подсхемам. Такая модификация схемы не изменяет ССФ.

1.2.3. Эквивалентные упрощения электрических схем

Из уравнений (1.2.1) и (1.2.2) следует, что для получения системного определителя необходимо принять ЭДС генераторов напряжения и токи генераторов тока равными нулю. Это соответствует на схеме замене генераторов ЭДС и приемников искомых токов короткозамкнутыми проводниками с $Z=0$ или $Y=\infty$, а также замене генераторов тока и приемников искомых напряжений z-ветвями с $Z=\infty$ или y-ветвями с $Y=0$. Следует отметить, что приемники напряжения и тока управляемых источников указанные преобразования не затрагивают. Физический смысл этих преобразований

состоит в том, что из схемы исключаются независимые источники $\underline{E}=0$ и $\underline{J}=0$, а значит, искомые напряжения и токи также обращаются в нуль: $\underline{U}=0$ и $\underline{I}=0$.

Другим источником появления в схеме ветвей с предельными значениями параметров как на постоянном токе, так и при гармоническом воздействии, являются энергоёмкие элементы. Например, индуктивное сопротивление $Z=pL=j\omega L$ и ёмкостная проводимость $Y=pC=j\omega C$ имеют значение, равное нулю, и бесконечно большое значение на круговой частоте, соответственно, $\omega=0$ и $\omega=\infty$.

Учет особенностей структуры и элементного состава позволяет упростить анализ электрических схем. Прежде всего из схемы удаляются z -ветви с $Z=\infty$ и y -ветви с $Y=0$. Далее в схеме замещаются короткозамкнутыми проводниками y -ветви с $Y=\infty$ и z -ветви с $Z=0$. Каждый из соединительных проводников необходимо стянуть в одну точку-узел, чтобы не загромождать схему, на которой не должно быть соединительных проводников и, разумеется, узлов, к которым подключены только короткозамкнутые проводники.

Последовательно соединенные z -ветви замещаются на схеме одной эквивалентной z -ветвью, параметр которой равен сумме параметров исходных z -ветвей. С другой стороны, параллельно соединенные y -ветви замещаются одной эквивалентной y -ветвью, параметром которой является сумма параметров исходных y -ветвей. Перечисленные выше эквивалентные упрощения иллюстрируются на рис. 1.2.2.

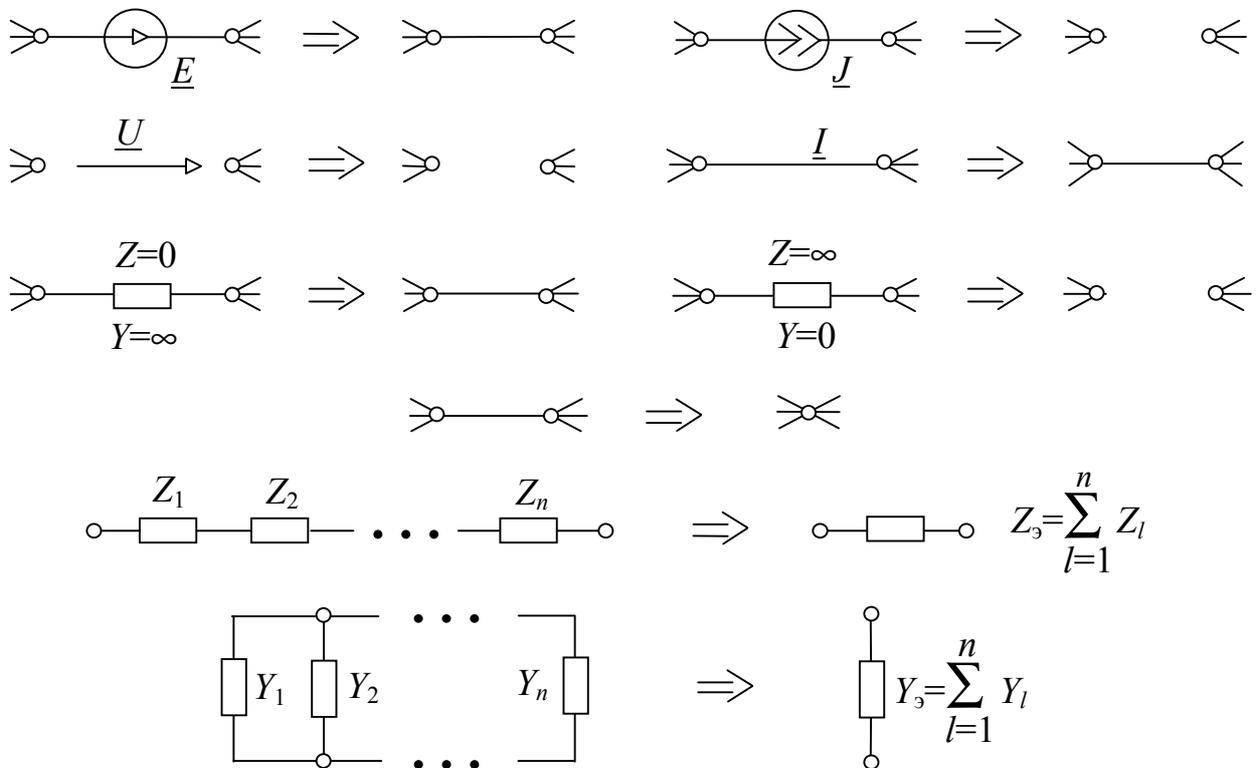


Рис. 1.2.2. Простейшие эквивалентные упрощения электрических схем, выполняемые перед нахождением схемного определителя

Другим упрощающим схему преобразованием является нейтрализация (устранение) влияния элемента на режим схемы вследствие замыкания или размыкания этого элемента. Нейтрализацию элемента можно вызвать также приравниванием значения его параметра к нулю. Случаи нейтрализации элементов отражены в табл. 1.2.1. Кроме традиционных элементов табл. 1.2.1 включает так называемый неудаляемый УИ (НУИ). Генератор НУИ и приемник НУИ в отличие от обычных генераторов и приемников нельзя нейтрализовать ни замыканием, ни размыканием.

Нейтрализацию генератора тока замыканием и генератора напряжения размыканием можно рассматривать как частные случаи нейтрализации генератора тока, помещенного в EI -контур, и генератора напряжения, включенного в JU -сечение. Действительно, в первом случае напряжение на генераторе тока не зависит от его тока J , а во втором случае ток через генератор напряжения не зависит от его ЭДС E . Аналогично этому нахождение напряжения на приемнике напряжения, помещенном в EI -контур, не представляет затруднений, поскольку определяется алгебраической суммой ЭДС генераторов напряжения (см. формулу (1.2.2)). С другой стороны, ток в приемнике тока, включенном в JU -сечение, выражается через токи генераторов тока согласно уравнению (1.2.1). Следует обратить внимание на то, что нейтрализацию УИ, как элемента схемы, образованного двумя ветвями, влечет нейтрализация либо его генератора, либо его приемника. Более общие случаи нейтрализации элементов отражены в табл. 1.2.2.

Если напряжения на приемниках напряжения и токи в приемниках тока известны, а эти приемники управляют генераторами, то соответствующие генераторы становятся независимыми и поэтому исключаются из схемы. Напомним, что элемент, нейтрализация влияния которого на режим схемы установлена, исключается из схемы в соответствии с его физическими свойствами, то есть генераторы напряжения и приемники тока стягиваются, а генераторы тока и приемники напряжения удаляются (см. рис. 1.2.2).

1.3. РАЗЛОЖЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ СХЕМ ПО ПАРАМЕТРАМ ЭЛЕМЕНТОВ И ПОДСХЕМ

1.3.1. Определители простейших схем

Практическое значение имеют схемы, определители которых отличны от нуля. Определители простейших схем легко получаются из закона Ома (см. формулы (1.1.1)). Слева на рис. 1.3.1 а – г изображены схемы и очевидные выражения для ССФ (см. рис. 1.1.5), а справа – показаны производные схемы, полученные в результате исключения генераторов и приемников, вместе с выражениями для определителей этих схем. Здесь и далее схемы, образованные

в результате стягивания и (или) удаления ветвей исходной схемы, называются производными схемами. Обратим внимание на то, что рис. 1.3.1 а – г может служить доказательством условий выделения и нейтрализации пассивных элементов, представленных в первой и второй строках табл. 1.2.1.

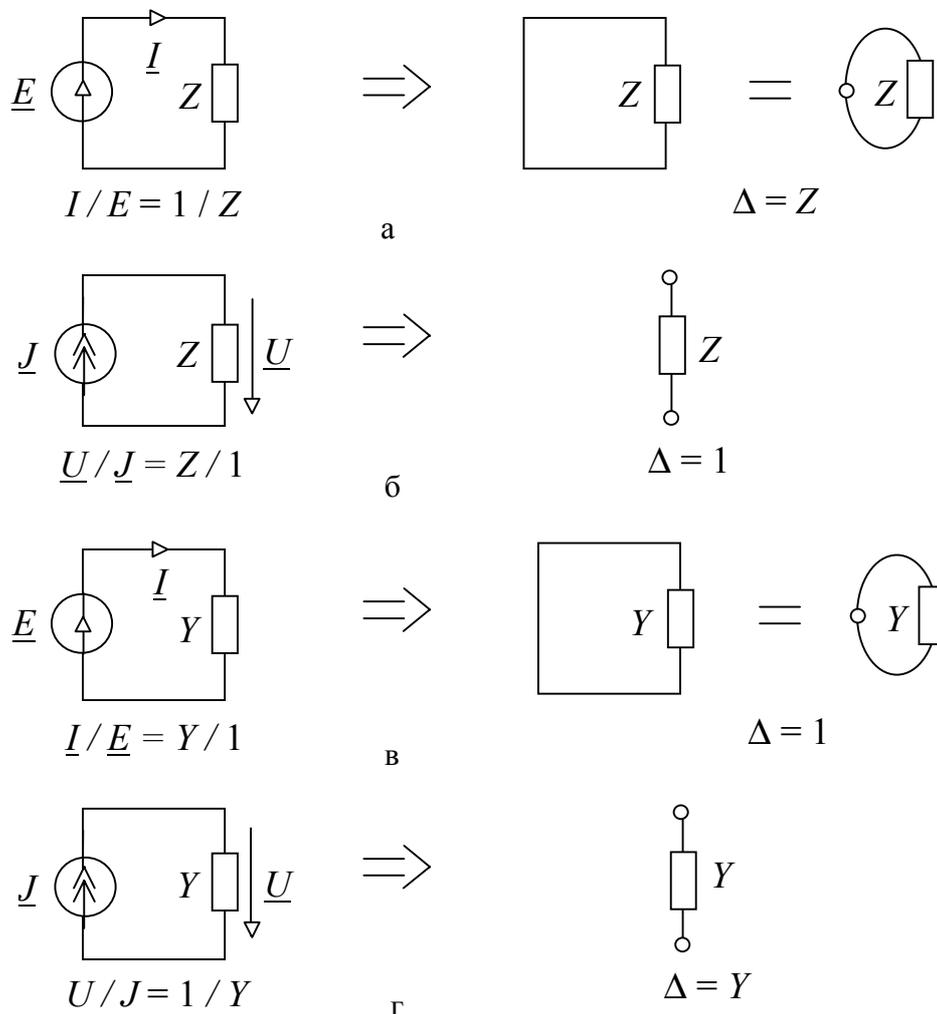


Рис. 1.3.1. Получение определителей простейших схем

1.3.2. Выделение параметров пассивных элементов

Выделение параметров элементов положено в основу метода схемных определителей и состоит в следующем. Выразим напряжения на ветвях схемы в подсистеме уравнений (1.2.2) через сопротивления и токи ветвей. В то же время матрица подсистемы уравнений (1.2.1) будет содержать элементы, равные 1, -1 или 0. Отсюда видно, что системный определитель является линейной функцией относительно параметра Z некоторой (любой) ветви, и слагаемые определителя можно подразделить на два подмножества. К первому подмножеству относятся слагаемые, включающие в качестве сомножителя выделяемый параметр Z . Слагаемые второго подмножества образуют определитель, полученный из системного определителя при условии $Z=0$.

Для перехода от системного определителя к определителю схемы используем замещение Z -ветви ИНУТ, как показано на рис. 1.2.1. Схемное отображение условия $Z=0$ состоит в исключении генератора $Z\underline{I}$ и приемника \underline{I} . Следовательно, слагаемые второго подмножества схемного определителя можно найти как определитель схемы, полученной из исходной схемы в результате стягивания указанных генератора и приемника (см. рис. 1.2.2).

При нахождении слагаемых определителя, относящихся к первому подмножеству, воспользуемся искусственным приемом, который заключается в том, чтобы наложить запрет на нейтрализацию ИНУТ, то есть объявить вырожденными производные схемы, в которых генератор напряжения $Z\underline{I}$ и (или) приемник тока \underline{I} являются висячими ветвями. В противном случае определители таких схем приведут к образованию слагаемых второго подмножества, которые получаются при условии $Z=0$. Этого нельзя допустить, поскольку, во-первых, каждая ветвь схемы имеет индивидуальное обозначение или номер, а во-вторых, из уравнений (1.2.1) и (1.2.2) следует, что схемный определитель не может содержать одинаковых слагаемых.

Наложение запрета на нейтрализацию УИ можно осуществить с помощью использования схемного элемента, названного выше НУИ. Основные свойства НУИ, отраженные в табл. 1.2.1, нетрудно вывести из закона Ома и определения ССФ, повторно обратившись к схемам, показанным на рис. 1.3.1 а – г.

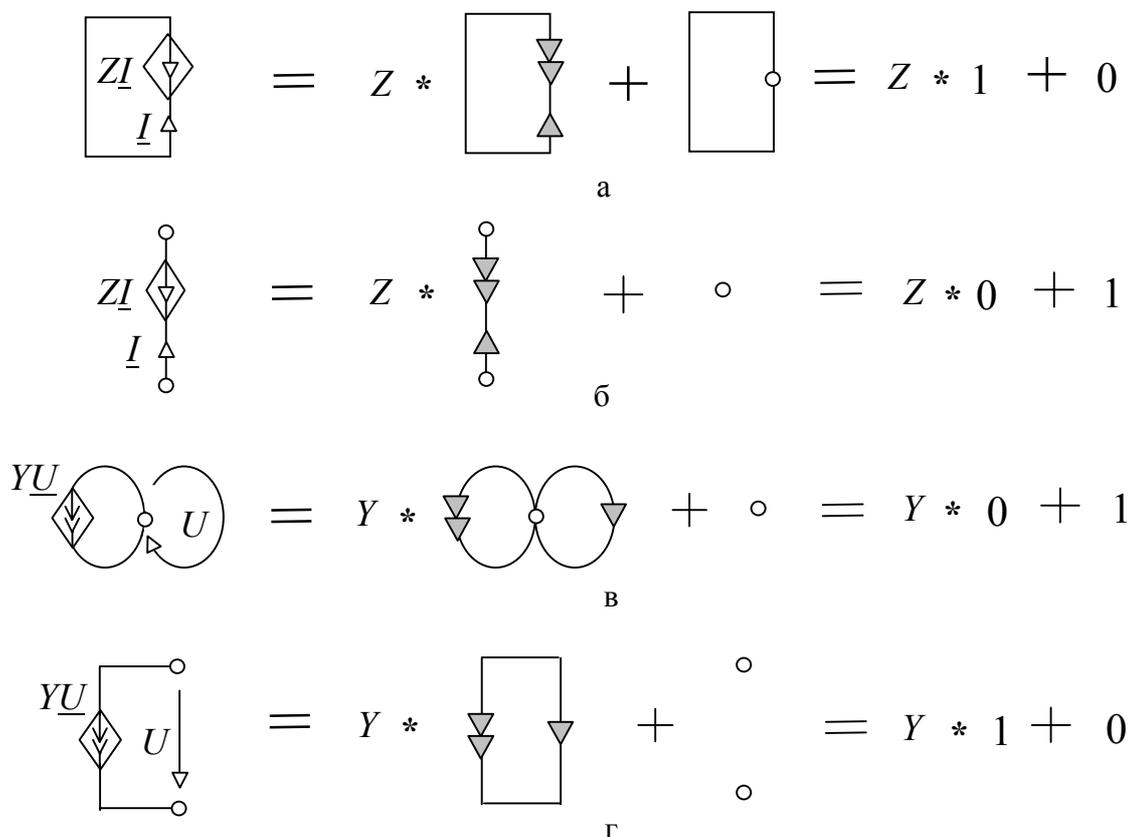


Рис. 1.3.2. К обоснованию свойств НУИ

Схемные уравнения, представленные на рис. 1.3.2 а – г, получаются в результате замещения пассивных элементов ИНУТ и ИТУН (см. рис. 1.2.1), а также выделения их параметров. Заметим, что короткозамкнутая ветвь-петля, определитель которой тождественно равен нулю, является частным случаем контура, содержащего приемники тока (см. табл. 1.2.2). Следствиями уравнений на рис. 1.3.2 являются свойства НУИ, которые иллюстрирует рис. 1.3.3.

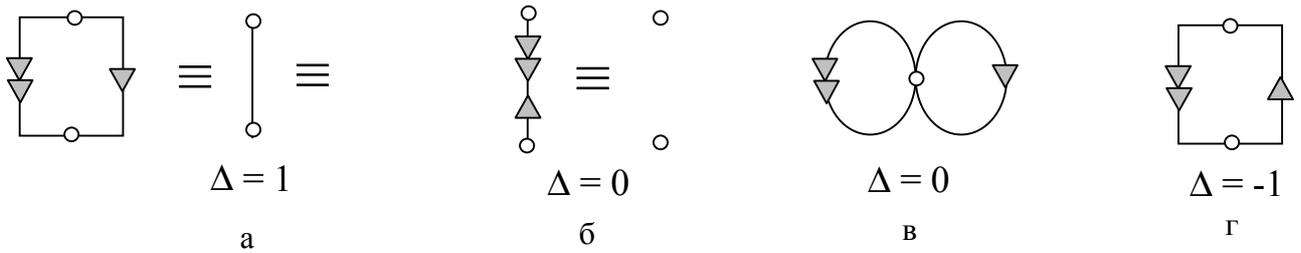


Рис. 1.3.3. Определители простейших схем с НУИ

Эквивалентность схем, показанных на рис. 1.3.3 а и б, приводит к схемным уравнениям для выделения параметров пассивных элементов в составе произвольной электрической схемы. Эти уравнения представлены на рис. 1.3.4.

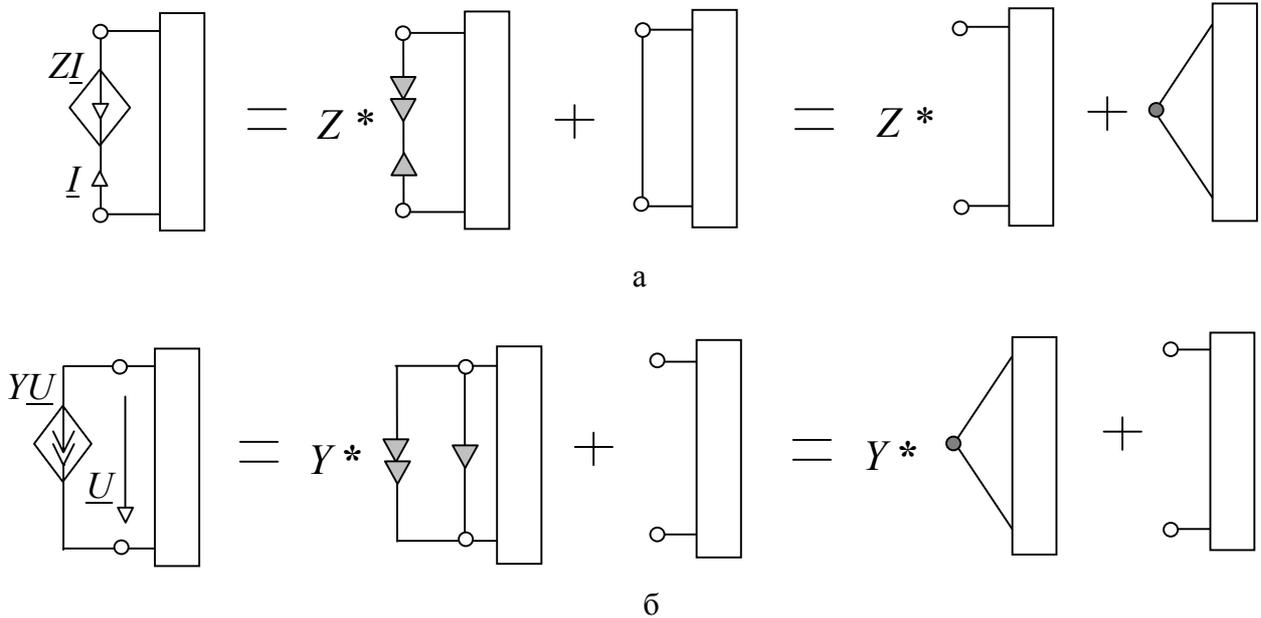


Рис. 1.3.4. Выделение параметров двухполюсников

С учетом рис. 1.2.1 уравнения на рис. 1.3.4 могут рассматриваться как доказательство формул Фойснера:

$$\Delta = Z \Delta^Z + \Delta_Z \tag{1.3.1}$$

и

$$\Delta = Y \Delta^Y + \Delta^Y, \tag{1.3.2}$$

где Δ^Z и Δ_Z - определители первой и второй производных схем, образованных в результате выделения Z -ветви; Δ^Y и Δ_Y - определители первой и второй

производных схем, являющихся следствием выделения Y -ветви. Верхние и нижние индексы при Δ указывают соответственно на удаление и стягивание той или иной ветви схемы.

Повторным применением формул (1.3.1) и (1.3.2) разложение определителя сложной схемы сводится к определителям простейших схем, изображенных на рис. 1.3.1 а – г справа (Z -петля, Z -ветвь, Y -петля, Y -ветвь). Определители этих схем полезно запомнить, чтобы уменьшить затраты времени на анализ схем, избежав завершающего применения формул (1.3.1) и (1.3.2), выполненного на рис. 1.3.2 а – г.

Изменение ориентации только у генератора или только у приемника в схемах на рис. 1.2.1 можно учесть помещением отрицательного знака перед параметром z или y . Если этого не сделать, то производная схема может иметь вид схемы на рис. 1.3.3 а, но с противоположной ориентацией генератора и приемника НУИ по отношению к одному из узлов, как показано на рис. 1.3.3 г. Определитель такой схемы, очевидно, равен -1 .

1.3.3. Выделение подсхем

Разложение схемных определителей можно значительно упростить, если представить исходную схему в виде соединения двух подсхем, как показано на рис. 1.3.5 слева, и применить формулы Фойснера:

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2 \quad (1.3.3)$$

и

$$\Delta = \Delta_1 \Delta_2(a,b) + \Delta_1(a,b) \Delta_2, \quad (1.3.4)$$

где Δ_1 и Δ_2 – определители первой и второй подсхем. Обозначение в скобках после Δ указывает на объединение внешних узлов a и b в соответствующих подсхемах. Формула (1.3.3) применяется, когда первая и вторая подсхемы имеют единственный общий узел (см. рис. 1.3.5 а).

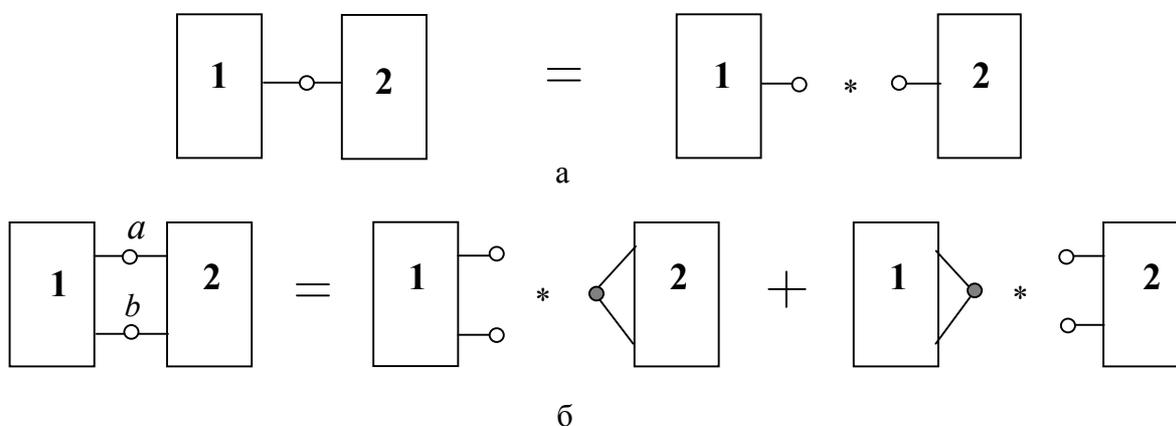


Рис 1.3.5. Нахождение определителей схем по частям

Для использования формулы (1.3.4) необходимо, чтобы схема делилась на подсхемы по узлам a и b (см. рис. 1.3.5 б). Формулы (1.3.3) и (1.3.4) можно применять, когда подсхемы 1 и 2 не имеют одна с другой управляющих связей, то есть генератор и приемник любого УИ или НУИ не должны находиться в различных подсхемах.

1.3.4. Метод схемных миноров [12, 13]

Подсхемы с одним и двумя внешними узлами (см. формулы (1.3.3) и (1.3.4)) являются простейшими случаями подсхем. Операция объединения внешних узлов подсхемы эквивалентна операции удаления соответствующей строки и столбца в матрице уравнений этой подсхемы [17]. Отсюда по аналогии с минором определителя матрицы можно ввести понятие «минор определителя схемы» или просто «минор схемы». Однако с помощью объединения внешних узлов можно находить только симметричные миноры подсхемы. В общем случае вместо объединения узлов используется подсоединение нуллора или НУИ к соответствующим узлам подсхемы. Действительно, на рис. 1.3.3 а показано, что объединение двух узлов эквивалентно подсоединению к этим узлам генератора и приемника некоторого НУИ. При нахождении несимметричного минора генератор и приемник НУИ не будут соединены параллельно.

Миноры подсхемы удобно отображать двоичными векторами (ДВ) размерности $2n$, где n – число внешних узлов подсхемы, не считая базисного узла. В качестве базисного узла выбирается произвольный узел из внешних узлов подсхемы. Единицы в первой (второй) половине элементов ДВ соответствуют конечным узлам подключения генераторов (приемников) НУИ. Если к внешнему узлу подсхемы не подсоединяются НУИ, то в соответствующие позиции ДВ заносятся нули. Положение или позиции элементов в каждой из половин ДВ задается упорядоченным множеством – кортежем внешних узлов подсхемы, исключая базисный узел. Обозначениями позиций ДВ служат обозначения узлов схемы. Базисный узел схемы, который не отображается в ДВ, является начальным узлом всех без исключения генераторов и приемников НУИ.

Для обозначения миноров схемы или подсхемы может применяться символика, принятая для обозначения миноров матрицы. Нетрудно перейти от обозначений миноров подсхемы с десятичными индексами к ДВ и обратно. Важно, что множество ДВ является унифицированным отображением миноров подсхем с одним и тем же числом внешних узлов. С учетом изложенного выше минор подсхемы, заданный некоторым ДВ, равен определителю схемы, которая получена из этой подсхемы в результате подсоединения НУИ согласно ее ДВ.

Генераторы и приемники НУИ должны быть пронумерованы в соответствии с их очередностью в ДВ, а именно, i -я по порядку единица в

первой (второй) половине ДВ соответствует генератору i (приемнику i) i -го НУИ. Все шесть миноров подсхемы с тремя внешними узлами изображены на рис. 1.3.6.

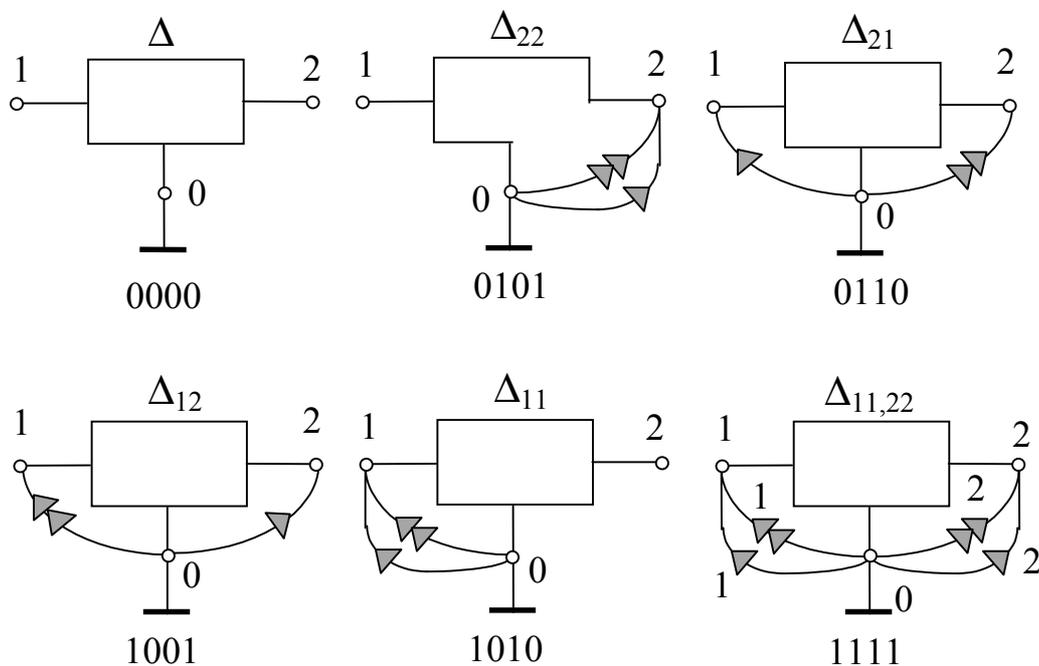


Рис. 1.3.6. Миноры трехузловой подсхемы

Подобно определителям, миноры схемы и матрицы эквивалентны. Однако выражения определителя и миноров матрицы схемы, представленные в развернутом виде, избыточны. Подсоединение НУИ позволяет представить внешние характеристики подсхем в виде производных схем, избежав применения в анализе схем по частям объектов, имеющих математическую природу, и порождаемых вычислительных трудностей.

1.3.4.1. Деление схемы на две части по трем узлам

Пусть схема образована в результате объединения двух подсхем с тремя внешними узлами, как показано на рис. 1.3.7. Двоичное отображение формулы, обобщающей формулы (1.3.3) и (1.3.4) и предусматривающей деление схемы на две части по узлам a , b и c , имеет вид

$$\Delta = \Delta_1(0000)\Delta_2(1111) + \Delta_1(0101)\Delta_2(1010) - \Delta_1(0110)\Delta_2(1001) - \\ - \Delta_1(1001)\Delta_2(0110) + \Delta_1(1010)\Delta_2(0101) + \Delta_1(1111)\Delta_2(0000). \quad (1.3.5)$$

Таким образом, слагаемые этой формулы представлены шестью парами ДВ. Векторы каждой пары взаимно дополняют друг друга (как минор и соответствующий минор [17]), отображая сомножители формулы. Кортеж общих (или внешних) узлов подсхем, являющийся обозначением позиций ДВ,

имеет вид: (a, b, a, b) или кратко $abab$. Узел c является базисным узлом для обеих подсхем.

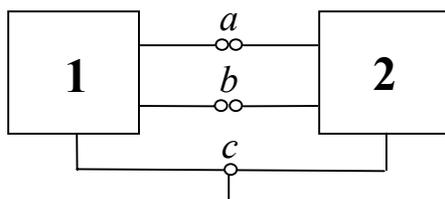


Рис. 1.3.7. Деление схемы по трем узлам

В силу одинаковой четности номеров строк и столбцов взаимно дополнительных миноров, информацию о знаке слагаемого можно получить из расположения единиц в одном из векторов пары. Принимается во внимание порядковый номер единицы в той или иной половине ДВ. Положительный (отрицательный) знак выбирается в случае четной (нечетной) суммы порядковых номеров позиций, содержащих единицы, в ДВ. Убедитесь в этом самостоятельно на примере формулы (1.3.5).

1.3.4.2. Общий случай деления на подсхемы

Формирование множества ДВ подсхемы не встречает затруднений. Самое простое решение состоит в том, чтобы перебирать $2n$ -разрядные двоичные числа (от $2n$ нулей до $2n$ единиц) и выбирать те из них, которые содержат одинаковое количество единиц в первой и второй половинах разрядов. Это свойство, вытекающее из определения ДВ, позволяет получить число ДВ подсхемы в виде

$$v = \sum_{l=0}^n \{n \ l\}^2,$$

где $\{n \ l\}$ – число сочетаний из n элементов по l .

Имея множество ДВ для одной из подсхем, можно легко получить ДВ второй подсхемы, применив операцию дополнения двоичного числа. Это значит, что единицы в позициях ДВ заменяются нулями и наоборот. Следовательно, общая формула определителя при делении схемы на две подсхемы по узлам $n, n-1, \dots, 0$ может быть представлена в виде

$$\Delta = \sum_{l=1}^v (-1)^{\sigma_l} \Delta_1(b_l) \Delta_2(\bar{b}_l), \quad (1.3.6)$$

где σ_l – показатель знака l -го слагаемого, определяемый по ДВ b_l ; $\Delta_1(b_l)$ – минор первой подсхемы, соответствующий вектору b_l ; $\Delta_2(\bar{b}_l)$ – минор

второй подсхемы, соответствующий дополнению двоичного вектора b_l . Узел с номером 0 является базисным узлом подсхем и не учитывается в обозначениях позиций ДВ. Полное доказательство формулы (1.3.6) выполните на основе теоремы об определителе суммы матриц [17].

1.3.4.3. Деление схемы на две части по четырем узлам

Применим выражение (1.3.6) для получения формулы бисекции по четырем узлам ($n=3$). Схема, представленная в виде двух подсхем, изображена на рис. 1.3.8.

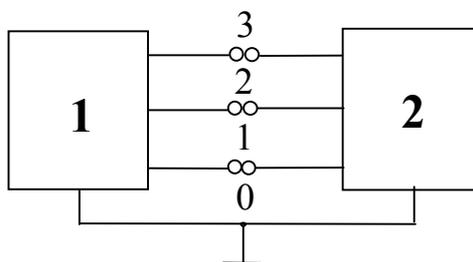


Рис. 1.3.8. Деление схемы по четырем узлам

Размерность ДВ подсхем в этом случае будет равна $2n=6$. Перебирая двоичные числа от 000000 до 111111, пропускаем те из них, у которых количество единиц в первых трех позициях (первой триаде) отличается от числа единиц в четвертой, пятой и шестой позициях вместе взятых (второй триаде). Отсюда получается двадцать ДВ подсхемы с четырьмя внешними узлами ($v=20$): 1) 000000; 2) 001001; 3) 001010; 4) 001100; 5) 010001; 6) 010010; 7) 010100; 8) 011011; 9) 011101; 10) 011110; 11) 100001; 12) 100010; 13) 100100; 14) 101011; 15) 101101; 16) 101110; 17) 110011; 18) 110101; 19) 110110; 20) 111111. Обозначения позиций этих ДВ имеют вид: 123123 (см. рис. 1.3.8).

Перечисленные ДВ можно рассматривать как двоичные отображения первых сомножителей в выражении (1.3.6), относящиеся к первой подсхеме. Следовательно, дополнения этих ДВ будут являться ДВ миноров второй подсхемы, соответствующих вторым сомножителям в выражении (1.3.6). Совместные пары ДВ, образующие формулу четырехузловой бисекции, перечислены ниже: 1) (1,20); 2) (2,19); 3) (3,18); 4) (4,17); 5) (5,16); 6) (6,15); 7) (7,14); 8) (8,13); 9) (9,12); 10) (10,11); 11) (11,10); 12) (12,9); 13) (13,8); 14) (14,7); 15) (15,6); 16) (16,5); 17) (17,4); 18) (18,3); 19) (19,2); 20) (20,1).

Для перехода от ДВ к минорам подсхем генераторы и приемники НУИ нумеруются согласно следованию единиц в ДВ. Например, из ДВ 011110 получаем 012120, что означает подсоединение к соответствующей подсхеме двух НУИ: НУИ–1 (02,01) и НУИ–2 (03,02) (см. рис. 1.3.6). Напомним, что

генератор и приемник, образующие некоторый НУИ, имеют одинаковые номера.

Знак пары совместных ДВ определяется на основе так называемых нумерованных ДВ, которые получаются путем сквозной нумерации генераторов и приемников НУИ сначала во второй, а затем в первой подсхемах. Например, для нахождения знака слагаемого (3,18) от ДВ 001010 и 110101 переходим к нумерованным ДВ 003030 и 120102. Далее поступаем в соответствии с топологическим правилом: нумерованные ДВ складываются, образуя вектор 123132. Триады этого вектора формируют подстановку $123 / 132$, которая имеет одну инверсию, то есть является нечетной. Следовательно, знак слагаемого (3,18) в формуле четырехузловой бисекции отрицательный. Аналогично поступая в случае других слагаемых этой формулы, убеждаемся, что, кроме третьего слагаемого, отрицательные знаки имеют слагаемые с номерами 5, 7, 9, 12, 14, 16 и 18.

1.3.4.4. Объединение подсхем

Множества внешних узлов объединяемых подсхем, как правило, не совпадают с множеством их общих узлов. В этом случае необходимо рассматривать согласно формуле (1.3.6) только те позиции ДВ, которые относятся к узлам, являющимся общими узлами для обеих подсхем. Оставшиеся позиции ДВ непосредственно переносятся во вновь формируемый ДВ объединенной схемы. Таким образом, взаимно однозначное соответствие миноров, присущее формуле (1.3.6), нарушается и некоторый минор одной подсхемы оказывается совместным с двумя и более минорами другой подсхемы.

Если среди общих узлов объединяемых подсхем отсутствуют узлы, являющиеся одновременно внешними узлами объединенной схемы, то ДВ совместных миноров подсхем должны дополнять друг друга в части позиций, соответствующих общим узлам подсхем. В качестве примера выполним объединение подсхем, образующих схему на рис. 1.3.9.

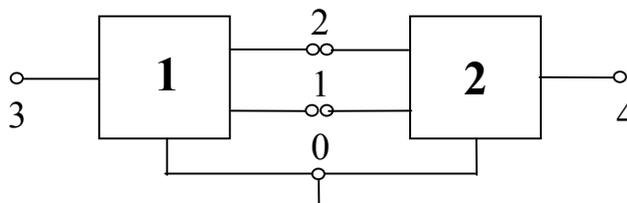


Рис. 1.3.9. Объединение подсхем с четырьмя внешними узлами

Для обозначения позиций ДВ первой и второй подсхем удобно выбрать кортежи 312312 и 124124. Чтобы установить совместность миноров подсхем, необходима информация, размещенная в позициях 1212 ДВ этих подсхем. При

нахождении знака пары совместных ДВ также используются только эти позиции.

Внешними узлами объединенной схемы являются собственные узлы 3 и 4 подсхем 1 и 2. Следовательно, размерность ДВ этой схемы равна четырем, а число ДВ или число миноров схемы равно шести. ДВ объединенной схемы приведены слева в табл. 1.3.1. Справа указаны пары совместных миноров подсхем с соответствующими знаками перед скобками. Произведения миноров подсхем (справа) в сумме с учетом знаков образуют минор объединенной схемы (слева).

Таблица 1.3.1. Получение миноров объединенной схемы на рис. 1.3.9

ДВ объединенной схемы: 3434	Совместные пары миноров объединяемых подсхем
0000	$+(1,19), +(2,13), -(3,12), -(5,7), +(6,6), +(8,1)$
0101	$+(1,20), +(2,15), -(3,14), -(5,9), +(6,8), +(8,2)$
0110	$+(4,16), -(7,10), +(9,4), -(10,3)$
1001	$+(11,18), -(12,17), +(14,11), -(17,5)$
1010	$+(13,19), +(15,13), -(16,12), -(18,7), +(19,6), +(20,1)$
1111	$+(13,20), +(15,15), -(16,14), -(18,9), +(19,8), +(20,2)$

Миноры объединенной схемы содержат всю информацию о ее ССФ (см. рис. 1.1.5). Нахождение знака слагаемых миноров объединенной схемы усложняется, когда обозначения позиций ДВ подсхем неупорядочены. Упорядочение позиций первой подсхемы предусматривает их приведение к виду: собственные узлы – общие узлы. Напротив, позиции ДВ второй подсхемы считаются упорядоченными, если они приведены к виду: общие узлы – собственные узлы. При этом порядок следования общих узлов в обозначениях позиций ДВ обеих подсхем должен быть одинаков. Таким образом, топологическое правило нахождения знака требует учета двух составляющих $(-1)^{d+h}$, где d – число инверсий, требующихся для упорядочения ДВ первой и второй подсхем; h – число инверсий в подстановке, образованной из номеров генераторов и приемников, которые инцидентны общим узлам подсхем.

Если среди общих узлов объединяемых подсхем имеются узлы, являющиеся одновременно внешними узлами объединенной схемы, то следует использовать обобщенное условие совместности ДВ. Для доказательства этого условия вводится дополнительный узел, соединенный короткозамкнутой ветвью, то есть вырожденным НУИ, с общим внешним узлом. Дополнительный

узел рассматривается в качестве собственного узла одной из подсхем. Таким образом, задача приводится к рассмотренному ранее случаю, когда у подсхем отсутствуют общие внешние узлы.

Обобщенное условие совместности ДВ. Два ДВ совместны, если результат поэлементного сложения содержимого каждой из общих позиций этих ДВ отличен от нуля.

При формировании объединенного ДВ содержимое собственных позиций ДВ объединяемых подсхем переносится без изменений в ДВ объединенной схемы. Содержимое каждой из позиций объединенного ДВ, формируемых для общих внешних узлов этих подсхем, равно поэлементному произведению содержимого соответствующих позиций ДВ объединяемых подсхем.

Алгоритм объединения двух подсхем

1. Парное сравнение ДВ подсхем и выявление пар совместных ДВ. Для этого используются позиции ДВ, соответствующие общим узлам подсхем, и условие совместности.

2. Приведение совместных пар ДВ к ДВ объединенной схемы. В объединенный ДВ в первую очередь заносится содержимое позиций, относящихся к собственным узлам первой подсхемы. Далее рассматриваются позиции, соответствующие общим внешним узлам. В объединенный ДВ заносится единица только в том случае, если содержимое соответствующих позиций в ДВ подсхем отлично от нуля. В противном случае объединенный ДВ дополняется нулем в позиции, соответствующей общему внешнему узлу. Формирование объединенного ДВ завершается учетом содержимого позиций, относящихся к собственным узлам второй подсхемы. Параметр найденного ДВ равен произведению миноров исходных подсхем.

3. Определение знаков совместных пар миноров объединяемых подсхем. Если в позициях общих внешних узлов обоих ДВ содержатся единицы, то ДВ первой подсхемы модифицируется путем помещения в соответствующую позицию нуля. Такая модификация необходима, поскольку единица из ДВ первой подсхемы перешла в объединенный ДВ подсхем. Далее применяется топологическое правило и знак рассчитывается по формуле $(-1)^{d+h}$.

4. Приведение подобных членов среди параметров объединенных ДВ по виду ДВ и образование миноров объединенной схемы. Перед параметром объединенного ДВ учитывается знак соответствующей пары миноров объединяемых подсхем.

Специального рассмотрения заслуживают случаи, когда подсхемы включают идеальные ОУ. Среди миноров таких подсхем могут быть миноры, тождественно равные нулю, если подсоединение НУИ в соответствии с ДВ минора приводит к получению вырожденной схемы. Это обусловлено тем, что идеальный ОУ имеет статус НУИ, и возможно образование контуров, содержащих только генераторы или только приемники НУИ (см. табл. 1.2.2). Наличие нулевых миноров позволяет значительно сократить количество ДВ,

подлежащих рассмотрению, как при анализе подсхем, так и при их объединении. Для этого необходимо использовать правила, учитывающие условие совместности ДВ объединяемых подсхем.

Правило 1. Если внешний узел подсхемы совпадает с выходным узлом идеального ОУ, принадлежащего этой подсхеме, то в первой половине позиций ДВ содержимое позиции этого внешнего узла равно нулю.

Правило 2. Если внешний узел подсхемы совпадает с выходным узлом идеального ОУ, принадлежащего другой подсхеме, то в первой половине позиций ДВ содержимое позиции этого внешнего узла равно единице.

В правилах 1 и 2 предполагается, что одним из выходных узлов идеального ОУ является базисный узел схемы, что практически всегда имеет место [22]. Дуальные правила могут быть предложены для входного узла идеального ОУ с дифференциальным входом, когда другой входной узел этого ОУ является базисным узлом схемы.

1.4. ВЫРАЖЕНИЕ ССФ ЧЕРЕЗ СХЕМНЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Пусть требуется найти передаточную ССФ вида $\underline{I}/\underline{E}$ (см. рис. 1.1.5). Для этого выполним формальную замену $\underline{E}=\underline{Z}\underline{I}$, как показано на рис. 1.4.1 слева, то есть вместо независимого источника напряжения поместим в схему ИНУТ $z\underline{I}$, который управляется искомым током \underline{I} . В полученной вспомогательной схеме отсутствуют независимые источники, поэтому токи будут отличаться от нуля только при условии, что схемный определитель $\Delta = 0$.

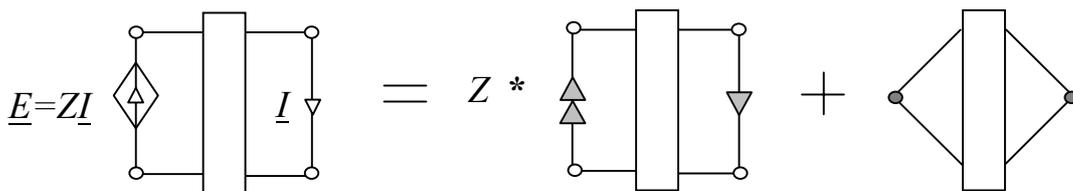


Рис. 1.4.1. К нахождению ССФ вида $\underline{I}/\underline{E}$

Схемное уравнение на рис. 1.4.1 можно рассматривать как обобщение схемного уравнения, представленного на рис. 1.3.4 а, поскольку НУИ, генератор и приемник которого не имеют общего узла, нельзя заместить разомкнутой (отсутствующей) ветвью. В аналитическом виде схемное уравнение на рис. 1.4.1 записывается следующим образом

$$\Delta = Z \Delta(Z \Rightarrow \text{НУИ}) + \Delta(Z=0), \quad (1.4.1)$$

где Δ – определитель схемы с ИНУТ $z\underline{I}$, $\Delta(Z \Rightarrow \text{НУИ})$ – определитель первой производной схемы, образованной из исходной схемы в результате придания ИНУТ с параметром Z статуса НУИ; $\Delta(Z=0)$ – определитель второй производной схемы, полученной из исходной схемы путем стягивания

генератора $Z\underline{I}$ и приемника \underline{I} . Совместное использование уравнения $\underline{E}=Z\underline{I}$ и формулы (1.4.1) с учетом $\Delta = 0$ приводит к выражению для искомой ССФ

$$\underline{I} / \underline{E} = -\Delta(Z \Rightarrow \text{НУИ}) / \Delta(Z=0). \quad (1.4.2)$$

Знак «минус» в формуле (1.4.2) можно опустить, если изменить ориентацию у генератора НУИ (или у приемника НУИ).

Аналогично формуле (1.4.2) получают выражения для остальных ССФ (см. рис. 1.1.5). Схемные уравнения, позволяющие выразить все ССФ через схемные определители, представлены в табл. 1.4.1. Как видно, с учетом рис. 1.3.3 а и б при нахождении входных ССФ можно избежать использования НУИ.

Таблица 1.4.1. Схемные выражения ССФ

Передаточные ССФ	Входные ССФ
$\frac{\underline{I}}{\underline{E}} = \frac{\text{[Схема: НУИ на входе, приемник на выходе]}}{\text{[Схема: приемник на входе, НУИ на выходе]}}$	$\frac{\underline{I}}{\underline{E}} = \frac{\text{[Схема: НУИ на входе, приемник на выходе]}}{\text{[Схема: приемник на входе, НУИ на выходе]}}$
$\frac{\underline{U}}{\underline{J}} = \frac{\text{[Схема: НУИ на входе, приемник на выходе]}}{\text{[Схема: приемник на входе, НУИ на выходе]}}$	$\frac{\underline{U}}{\underline{J}} = \frac{\text{[Схема: НУИ на входе, приемник на выходе]}}{\text{[Схема: приемник на входе, НУИ на выходе]}}$
$\frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{\text{[Схема: НУИ на входе, приемник на выходе]}}{\text{[Схема: приемник на входе, НУИ на выходе]}}$	$\frac{\underline{I}}{\underline{E}} = \frac{\text{[Схема: приемник на входе, НУИ на выходе]}}{\text{[Схема: приемник на входе, НУИ на выходе]}}$
$\frac{\underline{I}}{\underline{J}} = \frac{\text{[Схема: НУИ на входе, приемник на выходе]}}{\text{[Схема: приемник на входе, НУИ на выходе]}}$	$\frac{\underline{U}}{\underline{J}} = \frac{\text{[Схема: приемник на входе, НУИ на выходе]}}{\text{[Схема: приемник на входе, НУИ на выходе]}}$

1.5. ПРИМЕРЫ ФОРМИРОВАНИЯ ССФ ДЛЯ СХЕМ С ДВУХПОЛЮСНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

1.5.1. Простейший делитель напряжения

Схема резистивного делителя напряжения, а также схемное уравнение для нахождения передаточной ССФ по напряжению, изображены на рис. 1.5.1 (см. рис. 1.1.5 и табл. 1.4.1). Здесь и далее ΔN – определитель схемы числителя (numerator), а ΔD – определитель схемы знаменателя (denominator). Схема числителя упрощается с помощью табл. 1.2.2 следующим образом: R_1 стягивается как z -ветвь, соединенная последовательно с генератором НУИ, R_2 удаляется как z -ветвь, параллельная приемнику НУИ. При удалении ветви R_2 выделяется параметр R_2 в виде сомножителя. В результате получается схема, изображенная на рис. 1.3.3 а. Отсюда находится числитель искомой ССФ $\Delta N = R_2$.

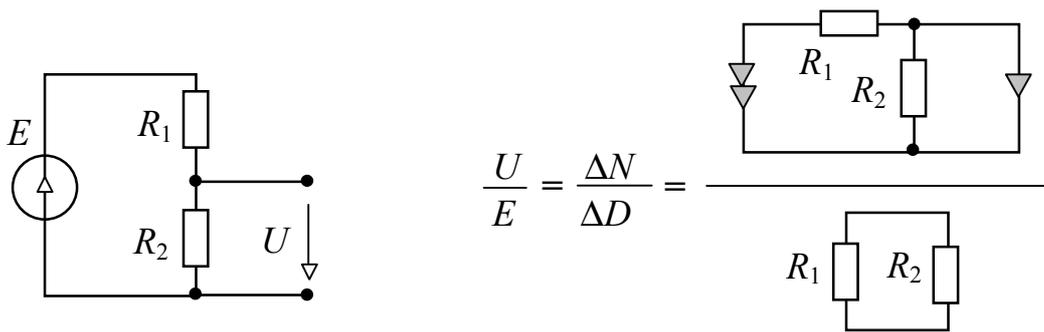


Рис. 1.5.1. Схема делителя напряжения и выражение ее ССФ

В схеме знаменателя последовательно соединенные ветви заменяются одной z -ветвью с параметром $R_1 + R_2$, которая является z -петлей (см. рис. 1.3.1 а). Таким образом, знаменатель искомой ССФ $\Delta D = R_1 + R_2$.

1.5.2. Сглаживающий фильтр

Схема фильтра изображена на рис. 1.5.2. Там же представлены схемное выражение для нахождения передаточной ССФ по напряжению и его преобразование. Как видно, схема числителя упрощается следующим образом (см. рис. 1.5.2 и табл. 1.2.2): стягивается ветвь R , как z -ветвь, соединенная последовательно с генератором НУИ; удаляются y -ветви pC_1 и pC_2 , как параллельные генератору и приемнику НУИ соответственно; стягивается ветвь

pL , как z -ветвь, соединенная последовательно с генератором НУИ (приемником НУИ). При стягивании z -ветвей и удалении y -ветвей параметры не выделяются. Отсюда $\Delta N = 1$.

Для разложения определителя схемы знаменателя используем формулы (1.3.1) и (1.3.2), как показано на рис. 1.5.2. Символ «0» в окончательном схемном уравнении соответствует определителю вырожденной схемы, полученной в результате стягивания z -петли с параметром R (см. рис. 1.3.2 а и табл. 1.2.2). Таким образом,

$$\Delta D = pC_1 [R(p^2 LC_2 + 1)] + (R+pL)pC_2 + 1.$$

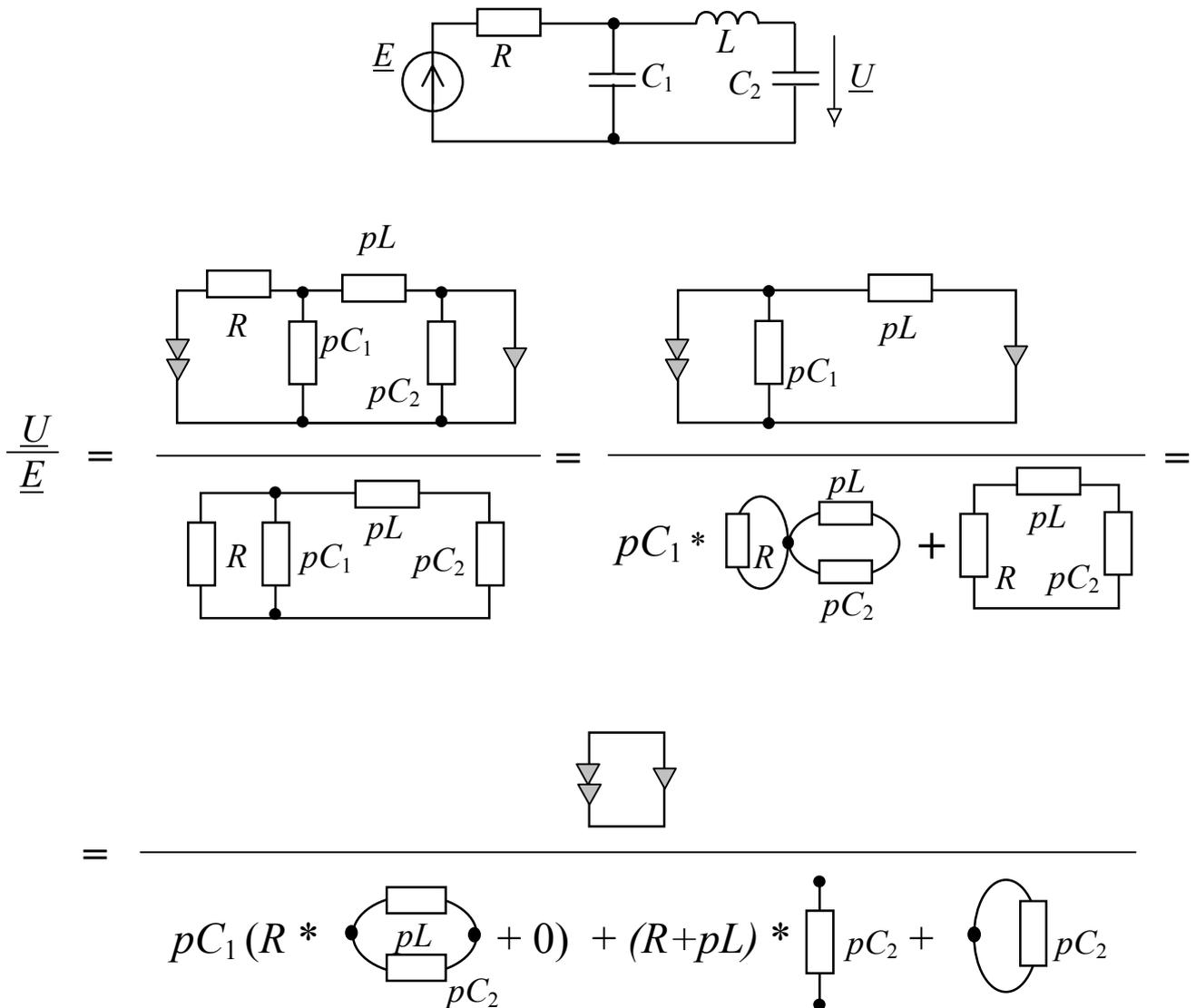


Рис. 1.5.2. Анализ схемы сглаживающего фильтра

1.5.3. Мост Уитстона

Мостовая схема Уитстона и соответствующее схемное уравнение изображены на рис. 1.5.3. Разложение определителя схемы числителя выполняется по формуле (1.3.1) для параметра R_1 . Первая производная схема упрощается путем стягивания R_2 и R_4 , а также удаления R_3 , как показано на рис. 1.5.3. При удалении z -ветви R_3 выделяется ее параметр. Упрощение второй производной схемы выполняется через удаление ветвей R_4 и R_2 , сопровождающееся выделением их параметров (см. рис. 1.5.3). Отсюда получаем $\Delta N = R_1 R_3 - R_4 R_2$.

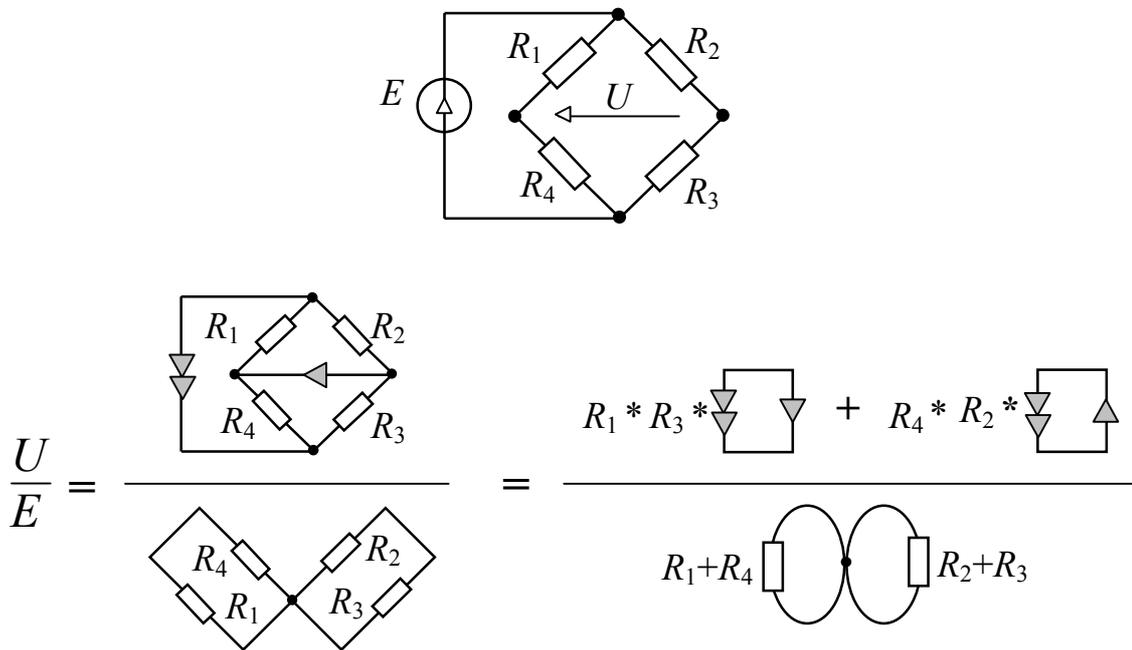


Рис. 1.5.3. Анализ схемы моста Уитстона

Разложение определителя схемы знаменателя выполняется по формуле (1.3.3). Схема знаменателя представляется в виде двух подсхем, являющихся z -петлями. Таким образом, $\Delta D = (R_1 + R_4)(R_2 + R_3)$.

1.5.4. Полосовой RC-фильтр

Схема фильтра и схемное выражение для нахождения передаточной ССФ по напряжению представлены на рис. 1.5.4 а.

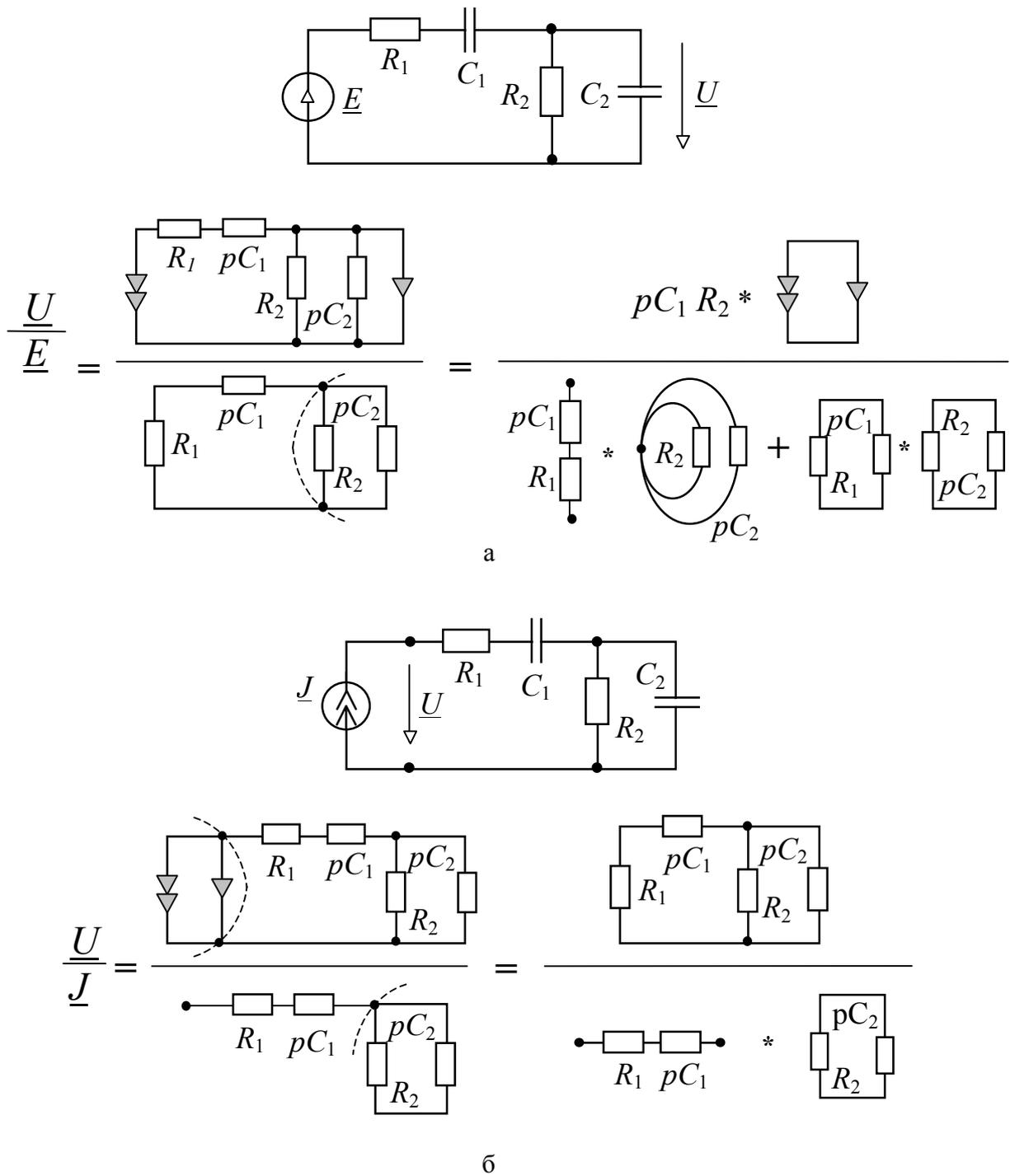


Рис. 1.5.4. Нахождение ССФ вида $\underline{U}/\underline{E}$ и $\underline{U}/\underline{J}$ для схемы полосового фильтра

Как видно, нахождение числителя ССФ заключается в стягивании R_1 и pC_1 , а также удалении R_2 и pC_2 . При стягивании y -ветви pC_1 и удалении z -ветви R_2 выделяются их параметры. Отсюда получаем $\Delta N = pC_1 R_2$. Для разложения определителя схемы знаменателя целесообразно использовать формулу (1.3.4). Схема знаменателя делится на две подсхемы, как показано на рис. 1.5.4 а. Левую подсхему будем считать первой, а правую - второй. В соответствии с изображениями производных схем, представленных на рис. 1.5.4 а, имеем

$$\Delta D = pC_1 R_2 + (pC_1 R_1 + 1)(pC_2 R_2 + 1).$$

Схема и схемно-алгебраическое выражение для нахождения ССФ входного сопротивления представлены на рис. 1.5.4 б. В результате получаем

$$Z = \frac{U}{J} = \frac{pC_1 R_2 + (pC_1 R_1 + 1)(pC_2 R_2 + 1)}{pC_1 (R_2 pC_2 + 1)}.$$

1.5.5. Анализ электрических схем

с несколькими независимыми источниками

Для анализа таких схем используется принцип наложения (суперпозиции), то есть общая реакция схемы на приемнике напряжения или тока находится путем вычисления реакций каждого отдельно взятого источника и последующего алгебраического суммирования этих реакций. При этом источники, не участвующие в порождении некоторого отклика, исключаются из схемы в соответствии с их физическими свойствами, то есть источники напряжения стягиваются, а источники тока удаляются.

На рис. 1.5.5 представлена у-схема с тремя независимыми источниками напряжения и схемное уравнение для нахождения искомого отклика. Отсюда получаем $U = (E_1 G_1 + E_2 G_2 + E_3 G_3) / (G_1 + G_2 + G_3)$.

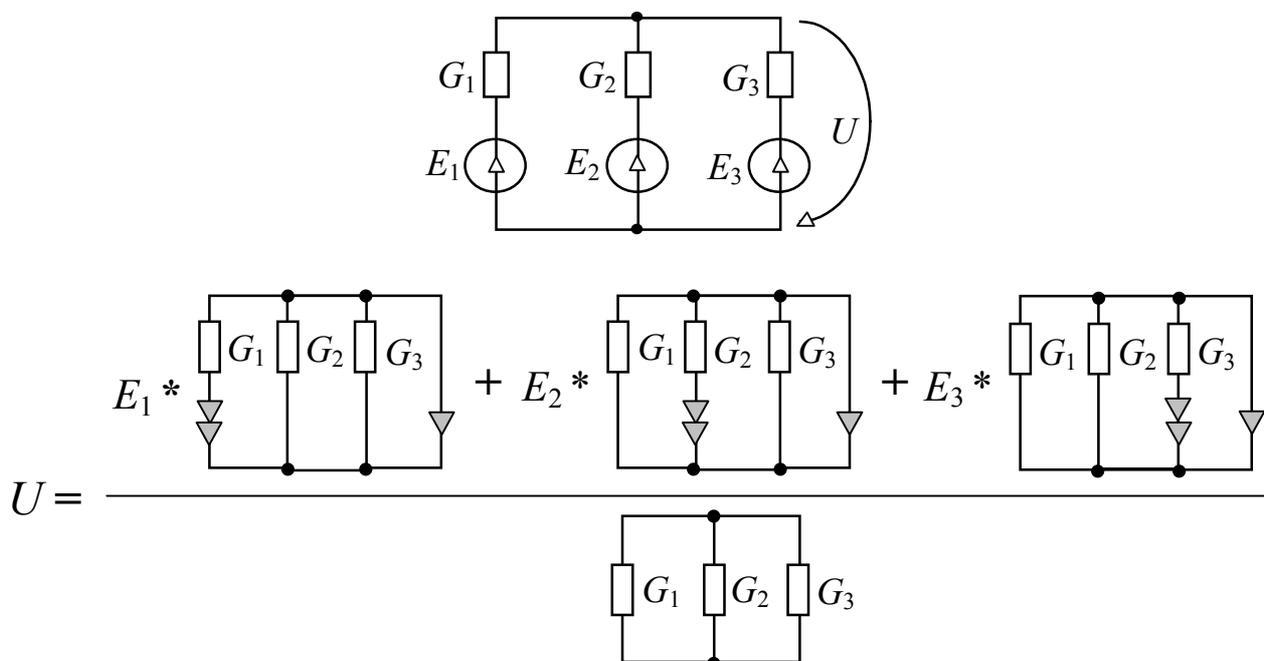


Рис. 1.5.5. Анализ схемы с тремя источниками напряжения

Схема, дуальная схеме на рис. 1.5.5, и соответствующее схемное выражение представлены на рис. 1.5.6. Из схемного выражения непосредственно следует решение: $I = (J_1 R_1 + J_2 R_2 + J_3 R_3) / (R_1 + R_2 + R_3)$.

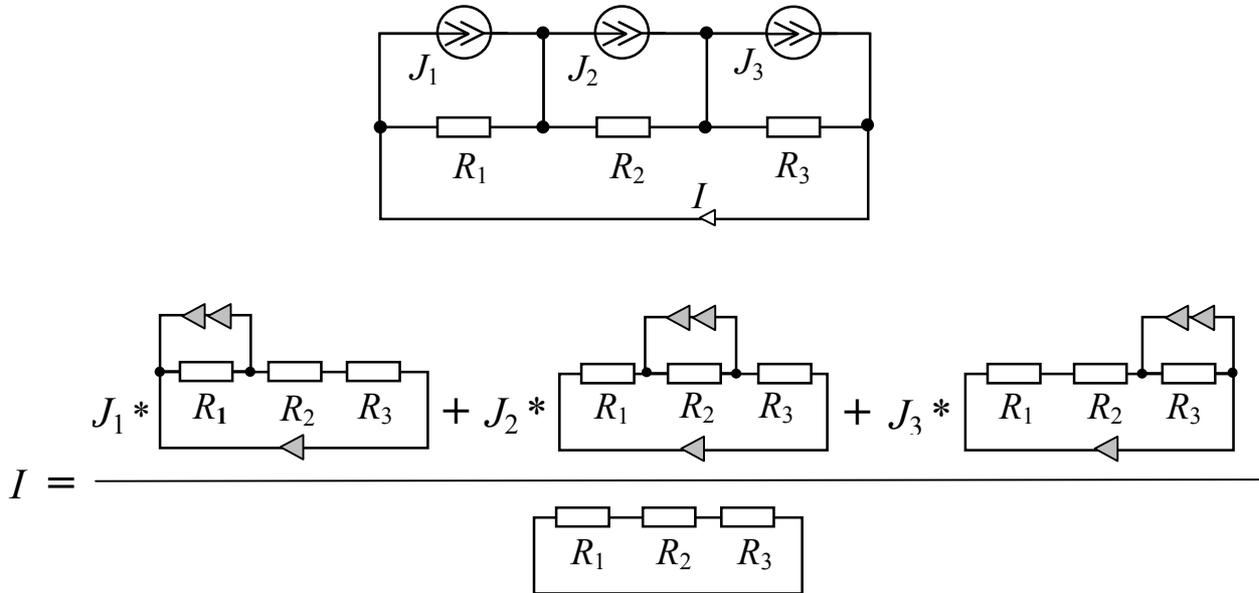


Рис. 1.5.6. Анализ схемы с тремя источниками тока

1.6. ВЫДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ УИ и НУИ

1.6.1. Выделение параметров УИ

Кроме ранее рассмотренных ИНУТ и ИТУН, элементами схемы могут быть источник напряжения, управляемый напряжением (ИНУН) и источник тока, управляемый током (ИТУТ). Изображения и обозначения параметров УИ всех четырех типов представлены на рис. 1.6.1 слева. По аналогии с y - и z -ветвями (см. рис. 1.3.4) множество слагаемых определителя схемы с УИ можно разбить на два подмножества относительно параметра χ некоторого УИ. Слагаемые первого из них содержат параметр χ в качестве сомножителя, а слагаемые второго подмножества не содержат этого параметра. Самое простое решение для получения слагаемых первого подмножества состоит в том, чтобы не выполнять какие-либо преобразования исходной схемы для получения первой производной схемы, а придать выделяемому УИ статус НУИ и оставить его в схеме. Специфика того или иного УИ, как для случая ИНУТ и ИТУН, будет отражена во втором слагаемом соответствующей формулы. Таким

образом, общую формулу для выделения параметра χ произвольного УИ можно записать в виде

$$\Delta = \chi \Delta(\chi \Rightarrow \text{НУИ}) + \Delta(\chi=0), \quad (1.6.1)$$

где $\Delta(\chi \Rightarrow \text{НУИ})$ – определитель первой производной схемы, полученной из исходной схемы путем придания выделяемому УИ статуса НУИ с параметром, равным единице; $\Delta(\chi=0)$ – определитель второй производной схемы, которая образована в результате нейтрализации выделяемого УИ, то есть принятия $\chi=0$. Схемные выражения, иллюстрирующие формулу (1.6.1) для различных типов УИ, приводятся на рис. 1.6.1.

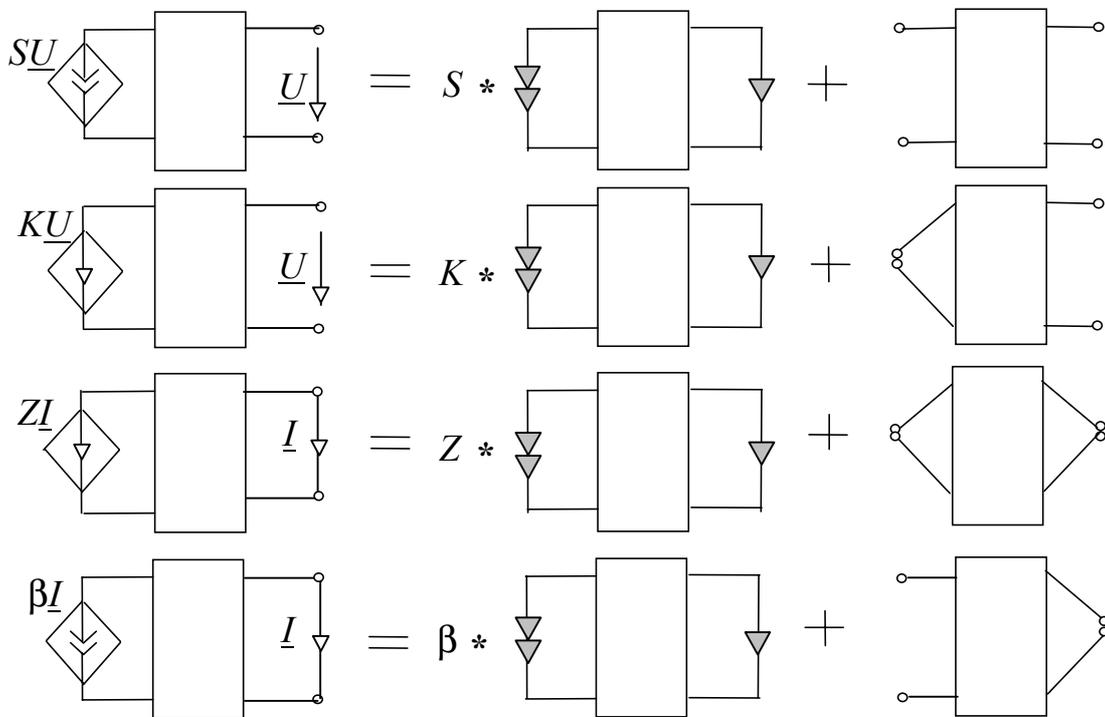


Рис. 1.6.1. Выделение параметров УИ

Использование понятия НУИ упрощает получение ССФ для схем с идеальными ОУ ($S \rightarrow \infty$, $K \rightarrow \infty$, $Z \rightarrow \infty$, $\beta \rightarrow \infty$), не требуя предварительного формирования общего символьного выражения и трудоемкого выполнения предельного перехода. Параметры ОУ заведомо являются сомножителями и при числителе, и при знаменателе ССФ. Следовательно, поместив в схему НУИ вместо идеального ОУ и придав параметрам НУИ значения, равные единице, можно избежать необходимости их последующего сокращения.

Из формулы (1.6.1) и рис. 1.6.1 непосредственно вытекают важные специальные случаи упрощения схемы путем преобразования УИ в НУИ и

нейтрализации УИ, которые отражены в табл. 1.2.2. Нейтрализация УИ наступает при стягивании или удалении его генератора или приемника.

1.6.2. Выделение параметров НУИ

Выделение параметров пассивных элементов по формулам (1.3.1) и (1.3.2) может привести как к нейтрализации УИ, так и к их преобразованию в НУИ согласно табл. 1.2.2. Выделение параметров УИ по формуле (1.6.1) также приводит исходную схему к производным схемам, содержащим НУИ. Важные случаи расположения НУИ, учет которых позволяет уменьшить объем выкладок при разложении схемных определителей, представлены в виде схемных выражений на рис. 1.6.2 и 1.6.3.

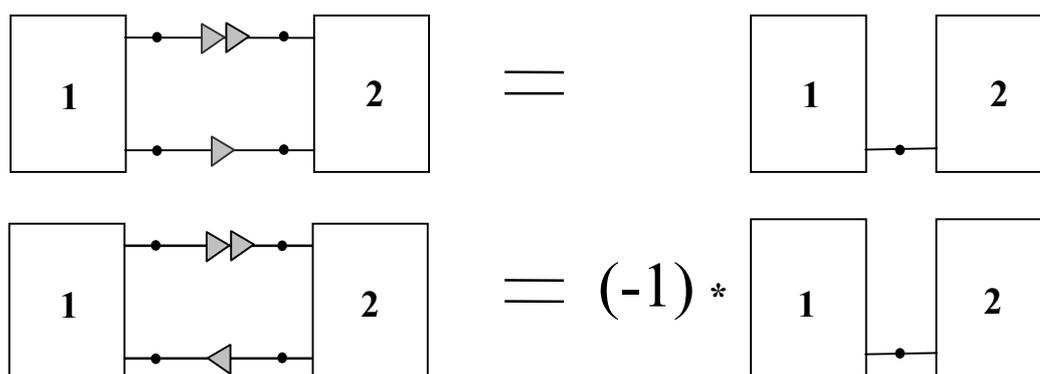


Рис. 1.6.2. Выделение НУИ, расположенного в сечении

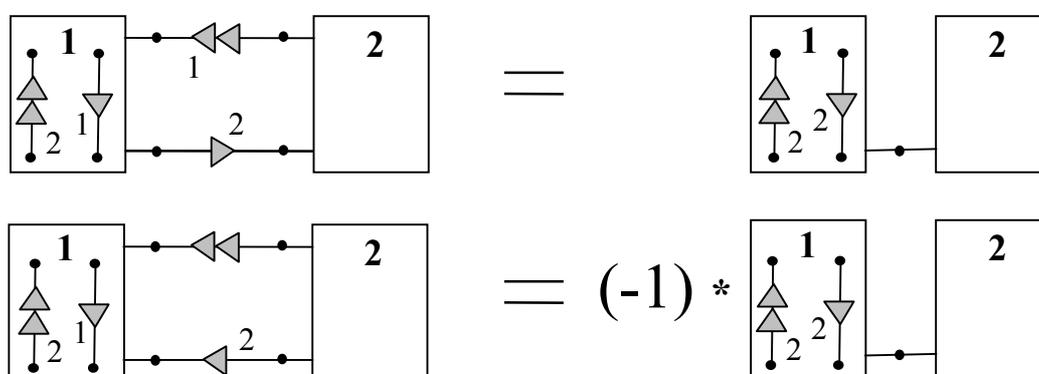


Рис. 1.6.3. Выделение НУИ, приемник которого находится вне сечения

В схемном выражении на рис. 1.6.3 выделяемым считается тот НУИ, генератор которого находится вне этих подсхем. В частных случаях одноименные или разноименные генератор и приемник НУИ, находящиеся вне выделенных подсхем, могут быть параллельными друг другу. При этом, если подсхемы 1 и 2 на рис. 1.6.2 содержат по одному узлу, то определитель объединенной схемы равен 1 или -1 , что согласуется с рис. 1.3.3 а и г. В свою очередь из случая последовательного соединения генератора и приемника НУИ (см. рис. 1.6.2 при замене правой подсхемы единственным узлом) вытекает свойство НУИ, показанное на рис. 1.3.3 б.

Если одноименные или разноименные генератор и приемник НУИ соединены параллельно и находятся в некоторой схеме, то целесообразно использовать схемные выражения, представленные на рис. 1.6.4 и 1.6.5.

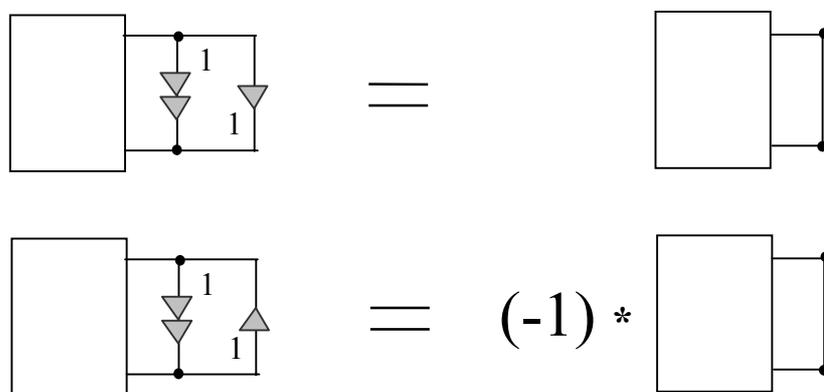


Рис. 1.6.4. Выделение НУИ с одноименными генератором и приемником

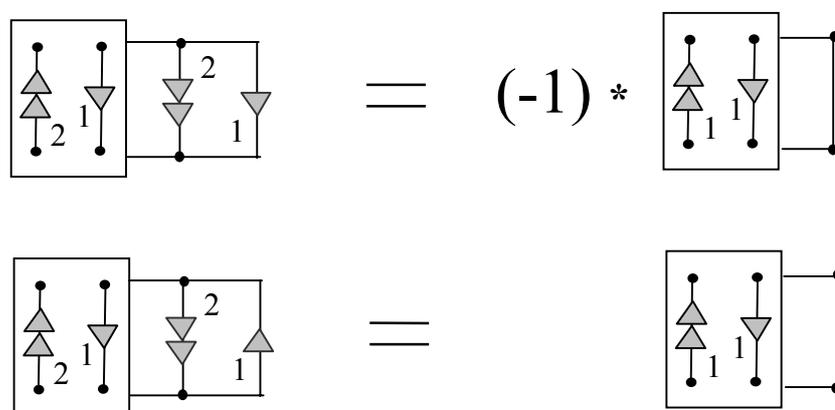


Рис. 1.6.5. Выделение НУИ с разноименными генератором и приемником

Выделение НУИ с помощью схемных выражений на рис. 1.6.2 – 1.6.5 позволяет не выполнять построение производных схем, а проводить суммирование числа НУИ, выделенных с отрицательным знаком, в уме. Этого достаточно, поскольку параметры НУИ считаются равными единице. Параметры УИ, согласно формуле (1.6.1), заносятся в выражение схемного определителя после придания этому УИ статуса НУИ. В зависимости от знака для краткости будем говорить о выделении НУИ «с плюсом» или «с минусом».

При разложении схемных определителей полезно помнить, что изменение ориентации только у генератора, или только у приемника НУИ влечет изменение знака определителя.

1.7. ПРИМЕРЫ ФОРМИРОВАНИЯ ССФ ДЛЯ СХЕМ С УИ

1.7.1. Анализ uz -схемы с ИТУН

Рассмотрим схему замещения операционного преобразователя [22], изображенную на рис. 1.7.1. Искомая ССФ представляется в виде отношения $U/E = \Delta N/\Delta D$ согласно схемной формуле из табл. 1.4.1. Схема числителя получается из исходной схемы преобразованием независимого источника напряжения и отклика напряжения в НУИ, которому присвоен порядковый номер 1 или, кратко, НУИ–1. Эта схема согласно табл. 1.2.2 подлежит следующим эквивалентным упрощениям: 1) стягивание z -ветви pL , как включенной последовательно с генератором НУИ–1; 2) удаление y -ветви pC , параллельной приемнику НУИ-1; 3) выделение z -ветви R_1 , параллельной генератору НУИ–1.

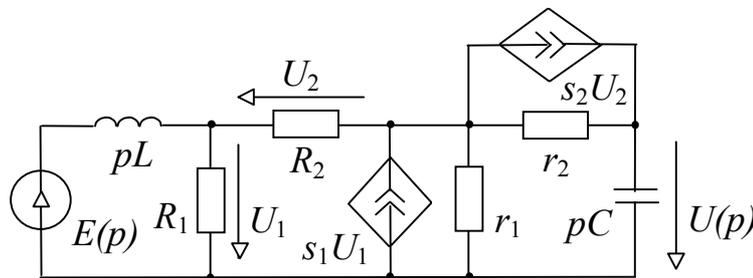


Рис. 1.7.1. Схема замещения операционного преобразователя на базе ИТУН

В результате последнего преобразования ΔN может быть найден как произведение R_1 на определитель Δ схемы, изображенной на рис. 1.7.2.

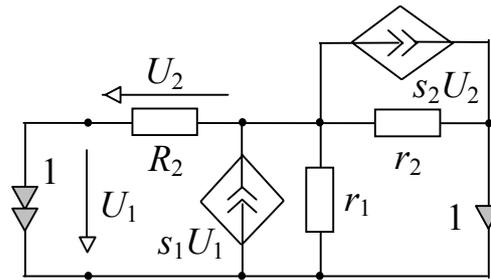


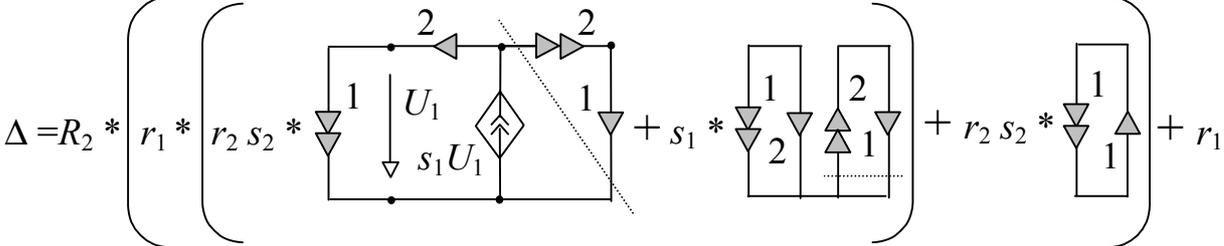
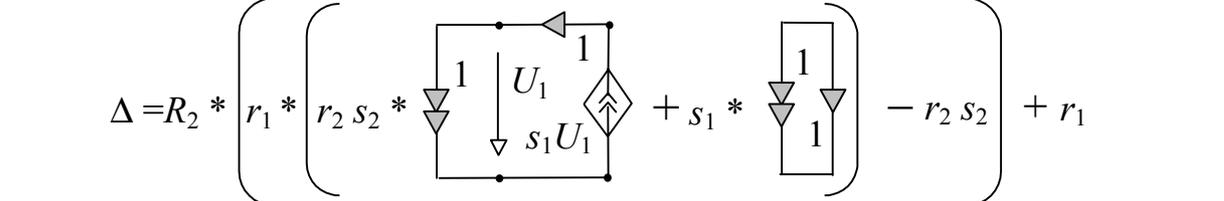
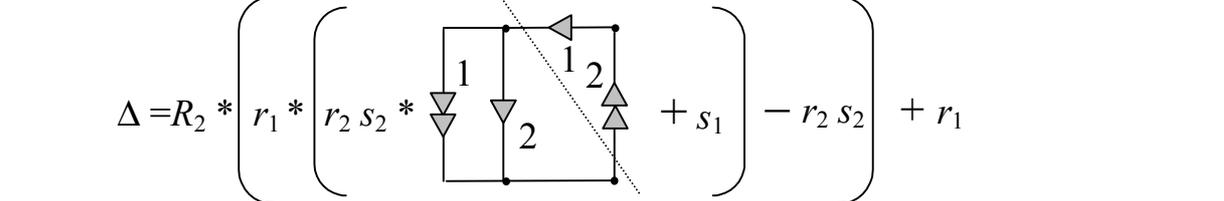
Рис. 1.7.2. Схема числителя ССФ для схемы на рис. 1.7.1

Определитель схемы на рис. 1.7.2 раскрывается по формулам (1.3.1) и (1.6.1) с использованием табл. 1.2.2 и рис. 1.6.2, 1.6.3 в последовательности, представленной в табл. 1.7.1.

Таблица 1.7.1. Разложение определителя схемы на рис. 1.7.2

№	Наименования операций и схемно-алгебраические выражения
1	2
1	<p>Выделение R_2 по формуле (3.1). Стягивание R_2 приводит к нейтрализации ИТУН s_2U_2.</p> <p>$\Delta = R_2 * \left(\text{Circuit 1} \right) + \left(\text{Circuit 2} \right)$</p>
2	<p>Выделение r_1 в первой производной схеме. Стягивание r_1 приводит к нейтрализации ИТУН s_1U_1, удалению-выделению r_2, преобразованию ИТУН s_2U_2 в НУИ-2. Во второй производной схеме нейтрализация ИТУН s_1U_1, удаление-выделение r_1, стягивание r_2 и выделение НУИ-1 с плюсом.</p> <p>$\Delta = R_2 * \left(r_1 * \left(\text{Circuit 1} \right) + r_2 s_2 * \left(\text{Circuit 2} \right) \right) + r_1$</p>

Окончание табл. 1.7.1

1	2
3	<p>Выделение r_2 в первой производной схеме. Удаление r_2 влечет преобразование s_2U_2 в НУИ-2. Стягивание r_2 приводит к нейтрализации s_2U_2 и преобразованию s_1U_1 в НУИ-2. Во второй производной схеме выделение НУИ-2 с плюсом.</p>  $\Delta = R_2 * \left(r_1 * \left(r_2 s_2 * \left(\text{Circuit 1} \right) + s_1 * \left(\text{Circuit 2} \right) + r_2 s_2 * \left(\text{Circuit 3} \right) + r_1 \right) \right)$
4	<p>В первой производной схеме выделяется НУИ-2 с плюсом. Во второй производной схеме выделяется НУИ-2 с плюсом. Определитель третьей производной схемы равен -1.</p>  $\Delta = R_2 * \left(r_1 * \left(r_2 s_2 * \left(\text{Circuit 1} \right) + s_1 * \left(\text{Circuit 2} \right) - r_2 s_2 \right) + r_1 \right)$
5	<p>В первой производной схеме выполняется преобразование s_1U_1 в НУИ-2. Определитель второй производной схемы (НУИ-контура) равен 1.</p>  $\Delta = R_2 * \left(r_1 * \left(r_2 s_2 * \left(\text{Circuit 1} \right) + s_1 - r_2 s_2 \right) + r_1 \right)$
6	<p>Выделение НУИ-2 с плюсом и получение НУИ-контура. Запись окончательного выражения</p> $\Delta = R_2 [r_1 (r_2 s_2 + s_1) - r_2 s_2] + r_1.$

При наличии некоторого навыка операции, выполняемые в табл. 1.7.1 над схемой рис. 1.7.2, можно выполнять мысленно (без изображений производных схем), используя иерархическую нумерацию, как показано ниже.

1. Удаление R_2 .

1.1. Удаление r_1 .

1.1.1. Удаление r_2 . Преобразование s_2U_2 в НУИ-2. Выделение НУИ-2 с плюсом. Преобразование s_1U_1 в НУИ-3. Выделение НУИ-3 с плюсом. Выделение НУИ-1 с плюсом.

1.1.2. Стягивание r_2 . Нейтрализация s_2U_2 . Преобразование s_1U_1 в НУИ-2. Выделение НУИ-2 с плюсом. Выделение НУИ-1 с плюсом.

1.2. Стягивание r_1 . Нейтрализация s_1U_1 . Удаление r_2 . Преобразование s_2U_2 в НУИ-2. Выделение НУИ-2 с плюсом. Выделение НУИ-1 с минусом.

2. Стягивание R_2 . Нейтрализация s_1U_1 и s_2U_2 . Удаление r_1 . Стягивание r_2 . Выделение НУИ-1 с плюсом.

Таким образом, определитель схемы на рис. 1.7.2 включает в себя определители производных схем с номерами 1., 1.1., 1.1.1., 1.1.2., 1.2. и 2. Удаление z-ветвей и преобразование ИТУН в НУИ при разложении определителей этих производных схем сопровождается выделением параметров в следующем порядке.

1. R_2 . 1.1. r_1 . 1.1.1 r_2, s_2, s_1 . 1.1.2. s_1 . 1.2. $r_2, s_2, -1$. 2. r_1 .

Параметры НУИ, выделяемые с плюсом, можно не учитывать в формуле схемного определителя. Учитывая ранее выделенный параметр R_1 и отделяя структурные части формируемого выражения скобками, получаем

$$\Delta N = R_1 \{ R_2 [r_1 (r_2 s_2 s_1 + s_1) - r_2 s_2] + r_1 \}.$$

Заметим, что выражение в фигурных скобках является результатом выкладок, представленных в табл. 1.7.1.

Знаменатель ССФ ΔD находится как определитель схемы, образованной из исходной схемы на рис. 1.7.1 путем стягивания независимого источника напряжения и удаления приемника искомого напряжения (см. табл. 1.4.1). В результате получается схема знаменателя, изображенная на рис. 1.7.3.

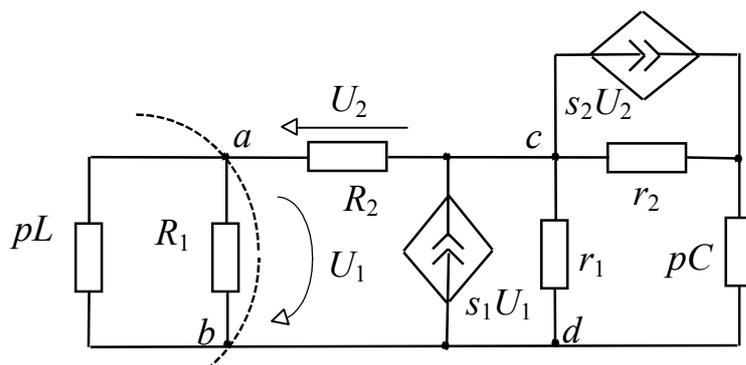


Рис. 1.7.3. Схема знаменателя ССФ для схемы на рис. 1.7.1

Ее можно представить в виде двух подсхем, как показано на этом рисунке, и применить формулу (1.3.4), поскольку первая (левая) и вторая (правая) подсхемы не имеют одна с другой управляющих связей. Очевидно, параметры первой подсхемы $\Delta 1 = pL + R_1$ и $\Delta 1(a, b) = pLR_1$.

При раскрытии $\Delta 2$ следует учесть, что удаление R_2 влечет вырождение второй подсхемы вследствие последовательного соединения приемников U_1 и U_2 . Стягивание R_2 приводит к нейтрализации ИТУН s_2U_2 путем удаления его генератора и приемника, а также преобразованию ИТУН s_1U_1 в проводимость с параметром $-s$ (см. рис. 1.2.1). Выделяя $-s$ по формуле (1.3.2), получаем $\Delta 2 = -s_1 r_1 (pC r_2 + 1) + (r_1 + r_2) pC + 1$.

Для раскрытия $\Delta 2(a, b)$ также используем формулу (1.3.4), выделив параллельное соединение элементов r_1 и R_2 (отнеся приемник U_2 к правой подсхеме). Присвоим левой и правой подсхемам соответствующей $\Delta 2(a, b)$ производной схемы номера 3 и 4. Параметры третьей подсхемы: $\Delta 3 = r_1 + R_2$ и

$\Delta 3(c,d) = r_1 R_2$. Параметры четвертой подсхемы: $\Delta 4 = pC(s_2 r_2 + 1)$ и $\Delta 4(c,d) = pC r_2 + 1$.

Отсюда получаем $\Delta D = (pL + R_1) [r_1 R_2 pC(s_2 r_2 + 1) + (r_1 + R_2)(pC r_2 + 1)] + pLR_1 [-s_1 r_1 (pC r_2 + 1) + (r_1 + r_2)pC + 1]$.

Предложенное выше решение является весьма экономным, поскольку все выкладки проводятся на основе рисунков только двух схем: схемы числителя и схемы знаменателя. Построения вспомогательных производных схем можно избежать, как в рассматриваемом случае, при анализе не слишком сложных электрических цепей, мысленно выполняя необходимые схемные преобразования. Наличие в схеме УИ, отличных от ИТУН, не делает решение задачи формирования ССФ более сложным.

1.7.2. Анализ уз-схемы с ИТУТ и ИНУН

Сформируем ССФ коэффициента передачи по напряжению $U/E = \Delta N/\Delta D$ для схемы замещения операционного преобразователя на базе ИТУТ и ИНУН [22], изображенной на рис. 1.7.4. Для краткости опустим подробные пояснения к расчету, которые были даны в подразделе 1.7.1. На рис. 1.7.5 представлена схема, образованная из схемы числителя искомой ССФ (см. табл. 1.4.1) в результате стягивания ветви pC , удаления ветви pL и стягивания ветви r_2 . В соответствии с табл. 1.2.2 определитель этой схемы, умноженный на коэффициент $p^2 CL$, является искомым числителем.

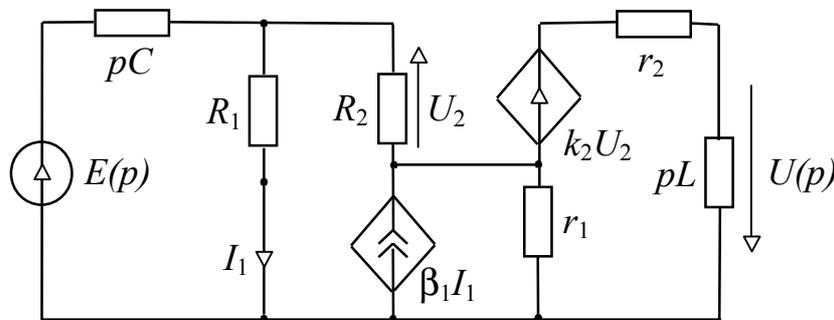


Рис. 1.7.4. Схема замещения операционного преобразователя

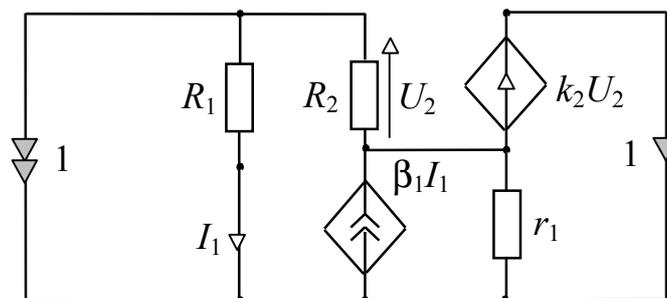


Рис. 1.7.5. Схема числителя ССФ для схемы на рис. 1.7.4

Разложение определителя схемы на рис. 1.7.5 выполняется в следующем порядке:

1. Удаление R_2 .

1.1. Удаление R_1 . Нейтрализация $\beta_1 I_1$. Преобразование $k_2 U_2$ в НУИ-2. Выделение НУИ-1 с плюсом. Выделение НУИ-2 с минусом. Стягивание r_1 .

1.2. Стягивание R_1 . Преобразование $\beta_1 I_1$ в НУИ-2. Удаление r_1 .

1.2.1. Преобразование $k_2 U_2$ в НУИ-3. Выделение НУИ-3 с плюсом. Выделение НУИ-2 с плюсом. Выделение НУИ-1 с плюсом.

1.2.2. Нейтрализация $k_2 U_2$. Выделение НУИ-1 с минусом. Выделение НУИ-2 с минусом.

2. Стягивание R_2 . Нейтрализация $\beta_1 I_1$ и $k_2 U_2$. Удаление r_1 и R_1 . Выделение НУИ-1 с плюсом.

Отсюда с учетом множителя $p^2 CL$ получаем

$$\Delta N = p^2 CL \{ R_2 [-R_1 k_2 + \beta_1 r_1 (k_2 + 1)] + r_1 R_1 \} .$$

Знаменатель ССФ находится как определитель схемы, изображенной на рис. 1.7.6.

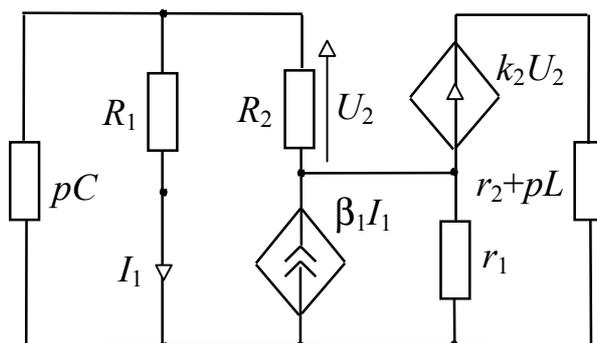


Рис. 1.7.6. Схема знаменателя ССФ для схемы на рис. 8.4

Разложение определителя этой схемы выполняется следующим образом:

1. Удаление $r_2 + pL$. Нейтрализация $k_2 U_2$.

1.1. Удаление R_2 . Стягивание r_1 . Нейтрализация $\beta_1 I_1$. Отсюда $\Delta 1 = pCR_1 + 1$.

1.2. Стягивание R_2 . Используя формулу (1.3.4), получаем

$$\Delta 2 = (pCr_1 + 1)R_1 + r_1(1 - \beta_1).$$

2. Стягивание $r_2 + pL$. Удаление r_1 . Нейтрализация $\beta_1 I_1$. По формуле (1.3.4)

$$\Delta 3 = (pCR_1 + 1)R_2(k_2 + 1) + R_1.$$

Итак,

$$\Delta D = (r_2 + pL)(R_2 \Delta 1 + \Delta 2) + r_1 \Delta 3.$$

Убедитесь самостоятельно, что сформированная ССФ $\Delta N / \Delta D$ эквивалентна ССФ, полученной в пункте 1.7.1. при взаимной замене элементов pC и pL , а также выполнении условий $\beta_1 = s_1 R_1$ и $k_2 = s_2 r_2$. Теперь рассмотрим

случай, когда параметр k_2 имеет бесконечно большое значение, то есть в схему вместо ИНУН включается идеальный ОУ. Для этого достаточно на схеме рис. 1.7.4 преобразовать $k_2 U_2$ в НУИ–2, что повлечет удаление R_2 . Поэтому изображение этого элемента на рис. 1.7.5 и 1.7.6 не будем принимать во внимание.

Разложение определителя модифицированной схемы на рис. 1.7.5 выполняется в следующем порядке.

1. Выделение НУИ–2 с плюсом.

1.1. Преобразование $\beta_1 I_1$ в НУИ–3. Удаление r_1 . Выделение НУИ–3 с плюсом. Стягивание R_1 . Выделение НУИ–1 с плюсом.

1.2. Нейтрализация $\beta_1 I_1$. Стягивание r_1 . Удаление R_1 . Выделение НУИ–1 с минусом.

Отсюда с учетом множителя $p^2 CL$ получаем

$$\Delta N = p^2 CL (\beta_1 r_1 - R_1) .$$

Для нахождения знаменателя ССФ используется модифицированная схема на рис. 1.7.6, в которой, кроме удаления R_2 , стягивается $r_2 + pL$, удаляется r_1 и нейтрализуется $\beta_1 I_1$. После выделения НУИ–2 с плюсом определитель этой схемы равен $pCR_1 + 1$. Таким образом,

$$\Delta D = r_1 (pCR_1 + 1) .$$

Сформированная ССФ $\Delta N / \Delta D$ эквивалентна полученной выше при условии $k_2 \rightarrow \infty$. Достоинством такой методики учета бесконечно больших значений параметров является то, что перед анализом схемы выполняется ее упрощение согласно табл. 1.2.2, исходя из физических соображений. В рассмотренном примере такими упрощениями являются преобразование ИНУН в НУИ и удаление элемента R_2 . Заметим, что этот элемент удаляется без выделения в формулу схемного определителя, поскольку модифицированная таким образом схема используется далее при построении схемы и числителя, и знаменателя.

1.8. АЛГОРИТМ ФОРМИРОВАНИЯ СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Схемный определитель тождественно равен нулю в случае вырожденной схемы. Поэтому перед выделением параметров выполняется проверка наличия простейших признаков вырождения (см. табл. 1.2.2). Убедившись в невырожденности схемы, следует исследовать ее на возможность проведения эквивалентных упрощений путем: 1) объединения параллельно (последовательно) включенных y -ветвей и ИТУН (z -ветвей и ИНУТ); 2) преобразования вырожденных ИТУН и ИНУТ в y -ветви и z -ветви; 3) придания элементу статуса НУИ, то есть преобразования в НУИ, стягивания или удаления согласно табл. 1.2.2.

Проверка на вырожденность и эквивалентные упрощения безусловно выполняются для всех схем и подсхем, полученных в результате преобразований исходной схемы. Поэтому эти важные операции, приводящие к существенной экономии выкладок, предусматриваются на каждом шаге алгоритма формирования схемного определителя. Рекомендуемый алгоритм заключается в повторном исполнении следующих шагов для исходной схемы, а также производных от нее схем и подсхем:

1. Выделение параметров z - и y -ветвей согласно табл. 1.2.2 (частные случаи формул (1.3.1) и (1.3.2)).

2. Выделение параметров УИ согласно табл. 1.2.2 (частные случаи формулы (1.6.1)). В случае преобразования УИ в НУИ параметр УИ переходит в качестве множителя в формулу схемного определителя, а УИ на схеме замещается НУИ, параметр которого равен единице.

3. Выделение по формуле (1.3.3) определителей подсхем, имеющих с оставшейся частью схемы - второй подсхемой единственный общий узел.

4. Выделение по формуле (1.3.4) параметра подсхемы, имеющей с оставшейся частью схемы - второй подсхемой два общих узла. Вторая подсхема при этом является вырожденной или становится вырожденной в случае объединения внешних узлов.

5. Выделение параметров НУИ в соответствии со схемными выражениями на рис. 1.6.2, 1.6.3 и их частными случаями (параллельно или последовательно соединенные генератор и приемник НУИ).

6. Применение формулы (1.3.4) в общем случае. Здесь рассматриваются возможности деления схемы на подсхемы по двум узлам. Предпочтение отдается варианту деления, при котором подсхемы имеют приблизительно одинаковую сложность. Не допускается размещение одноименных генератора и приемника в различных подсхемах.

7. Выделение параметров пассивных элементов по формулам (1.3.1) и (1.3.2).

8. Выделение параметров УИ по формуле (1.6.1).

В результате работы алгоритма формируется вложенное выражение схемного определителя или обнаруживается вырожденность схемы. Изменяя взаимно порядок следования шагов 5, 6 и 7, можно получить выражение с первоочередным выделением параметров выбранных элементов. Таким образом удастся управлять процессом формирования ССФ, что полезно, например, в случае нахождения функций чувствительности к изменениям заданных параметров.

1.9. О ВЗАИМОСВЯЗИ СХЕМНОГО И МАТРИЧНОГО ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

В ходе обсуждения схемного подхода к анализу электрических цепей, изложенного в предыдущих разделах пособия, нередко возникают споры о целесообразности использования понятия определителя схемы или схемного определителя. При этом понятие «опредетель схемы» воспринимается как вольное и краткое именованое определителя матрицы узловых проводимостей или какой-либо другой матрицы электрической схемы. Ниже приводятся дополнительные доводы в пользу утвердительного ответа на вопрос о придании понятиям «схемный определитель» и «схемный минор» терминологического статуса.

Начала теории определителей, истоки которой восходят к работе Готфрида Лейбница 1693 года, содержат некоторое методическое противоречие. С одной стороны, определитель матрицы в виде суммы отдельных слагаемых можно найти без использования порядковой нумерации строк и столбцов, применив для этого, например, буквенные обозначения. С другой стороны, желая получить компактное (вложенное) выражение определителя с помощью разложения Лапласа по строке (столбцу) или нескольким строкам (столбцам), приходится использовать понятие алгебраического дополнения, которое отличается от соответствующего минора матрицы знаком, учитывающим порядковые номера строк и столбцов [23].

Для матриц высокой размерности индуктивное построение определителя оказывается предпочтительным или единственно возможным. Разложение определителя матрицы A по некоторому элементу a_{ij} (выделение элемента a_{ij}) имеет вид

$$\Delta = (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij} + \Delta(a_{ij}=0), \quad (1.9.1)$$

где Δ_{ij} – минор, то есть определитель матрицы, образованной из матрицы A путем вычеркивания строки i и столбца j ; $\Delta(a_{ij}=0)$ – определитель матрицы, полученной из матрицы A в результате удаления элемента a_{ij} . Формула (1.9.1) применяется к определителям Δ_{ij} и $\Delta(a_{ij}=0)$ рекурсивно до получения матриц первого порядка и вырожденных матриц.

Теорема Лапласа в ее общем или специальных случаях довольно широко используется при аналитическом решении систем линейных алгебраических уравнений и формировании символьных схемных функций электрических цепей [17, 24, 25]. При этом нахождение знака требует существенной доли в затратах времени на разложение определителей. Это связано не только и не столько с наличием дополнительных операций сложения, а прежде всего, с необходимостью перенумерации строк и столбцов в результате выделения элементов матриц.

Алгебраическое правило нахождения знака (см. формулу (1.9.1)), возможно, обладает наглядностью при раскрытии определителей вручную.

Однако в случае матриц высокой размерности, которые имеют, как правило, высокую разреженность, приходится использовать их списочное кодирование, задавая списками-множествами только ненулевые элементы. Соответствующие методы опираются на графовые (топологические) представления и широко используются в настоящее время при численном решении систем уравнений [26]. Таким образом, современные технологии решения систем уравнений фактически отрицают понятие матрицы как таблицы элементов.

При разложении определителя матрицы в символьном (буквенном) виде также желательно ее представление в виде топологического объекта, в котором номера строк и столбцов служат лишь для указания расположения элементов и не должны непосредственно использоваться для вычисления знаков.

Пусть матрица задается списком P ее ненулевых элементов. В каждом элементе списка p_k , кроме буквенного обозначения или численного значения соответствующего элемента матрицы, содержатся его координаты – номера строки и столбца. Введем функцию совпадения $sim(i,j)$, равную 1 при $i=j$ и -1 при $i \neq j$. Тогда определитель матрицы A раскрывается рекурсивно по формуле

$$\Delta = sim(i,j) a_{ij} \Delta_{ij}(i \rightarrow j) + \Delta(a_{ij}=0), \quad (1.9.2)$$

где $\Delta_{ij}(i \rightarrow j)$ – определитель матрицы, которая задана списком, образованным из списка матрицы A в результате следующих преобразований: 1) вычеркивания элементов с номерами строки i и (или) столбца j ; 2) замены номера i в списке элементов матрицы на номер j . Если $i=j$, то второе преобразование не выполняется.

Выражения определителей, полученные на основе формул (1.9.1) и (1.9.2), могут различаться только знаками при некоторых подвыражениях и полностью совпадают при раскрытии скобок. Ниже приведен пример разложения определителя матрицы третьего порядка по формуле (1.9.2). Для наглядности список элементов помещен в матрицу.

Пример 1.

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ d_{21} & e_{22} & f_{23} \\ g_{31} & h_{32} & i_{33} \end{bmatrix} &= sim(1,1) a \Delta_{11}(1 \rightarrow 1) + sim(1,2) b \Delta_{12}(1 \rightarrow 2) + \\ &+ sim(1,3) c \Delta_{13}(1 \rightarrow 3) = \\ &= a \det \begin{bmatrix} e_{22} & f_{23} \\ h_{32} & i_{33} \end{bmatrix} - b \det \begin{bmatrix} d_{22} & f_{23} \\ g_{32} & i_{33} \end{bmatrix} - c \det \begin{bmatrix} d_{23} & e_{22} \\ g_{33} & h_{32} \end{bmatrix} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a (\text{sim}(2,2) e | i_{33} | + \text{sim}(2,3) f | h_{33} |) - \\
&- b (\text{sim}(2,2) d | i_{33} | + \text{sim}(2,3) f | g_{33} |) - \\
&- c (\text{sim}(2,3) d | h_{33} | + \text{sim}(2,2) e | g_{33} |) = \\
&= a (e i - f h) - b (d i - f g) - c (-d h + e g).
\end{aligned}$$

Таким образом, в формуле (1.9.2) операция сложения номеров строки и столбца заменена операцией сравнения, которая применима не только к цифровым, но и к буквенным, знаковым и т. д. объектам. Затраты на изменение пометок объектов несопоставимо меньше тех, которые требуются при порядковой нумерации строк и столбцов после выделения очередного элемента матрицы по формуле (1.9.1).

Для доказательства формулы (1.9.2) используется то обстоятельство, что матрица порядка n может быть отображена электрической схемой с n^2 источниками тока, управляемыми напряжением, которая имеет $n+1$ узлов [26]. При разложении определителя такой схемы используем метод стягивания и удаления ветвей [11]. Соответствующая формула применительно к рассматриваемому случаю будет иметь вид

$$\Delta = \text{sim}(i,j) G_{i0j0} \Delta_G + \Delta(G_{i0j0}=0), \quad (1.9.3)$$

где G_{i0j0} – параметр источника тока, направленного от узла i к узлу 0 , управляемого напряжением, ориентированным от узла j к узлу 0 ; Δ_G – определитель схемы, полученной из первоначальной схемы в результате следующих преобразований: 1) стягивание генератора (приемника) выделяемого управляемого источника таким образом, чтобы генераторы тока (приемники напряжения), которые присоединены к узлу i (узлу j) переключились на узел 0 ; 2) объединение узлов i и j ; $\Delta(G_{i0j0}=0)$ – определитель схемы, образованной из первоначальной схемы путем нейтрализации выделяемого управляемого источника.

Преобразование 1 в формуле (1.9.3) соответствует вычеркиванию строки i и столбца j в матрице A , а преобразование 2 изоморфно замене номеров $i \rightarrow j$, что доказывает формулу (1.9.2) и подтверждает эквивалентность вложенных выражений определителей матрицы и отображающей ее схемы, получаемых с помощью формул (1.9.2) и (1.9.3).

Операции со схемой, отображающей матрицу A , изоморфны операциям с полной [17] (неопределенной [24]) матрицей, полученной из матрицы A добавлением базисных $(n-1)$ -й строки и $(n-1)$ -го столбца, содержащих избытки строк и столбцов соответственно

$$a_{k,n+1} = - \sum_{l=1}^n a_{kl} \quad \text{и} \quad a_{n+1,k} = - \sum_{l=1}^n a_{lk}.$$

Сумма элементов всех строк, как и столбцов, неопределенной матрицы равна нулю, а операции над ней в соответствии с формулой (1.9.2) приводят к нахождению ее минора, являющегося искомым определителем.

Важную роль в приложениях, в частности в теории электрических цепей [9, 17], играют неопределенные матрицы общего вида, когда параметры элементов схемы могут быть расположены в четырех позициях матрицы вне базисных строки и столбца. Параметр некоторого элемента дважды входит в соответствующую строку или столбец – один раз с положительным знаком, а другой раз с отрицательным. Сложение этих строк и столбцов влечет исчезновение указанного параметра в производной матрице. Данное обстоятельство по существу учитывается и в формуле (1.9.2), но в качестве второй строки и второго столбца используются базисные строка и столбец, поэтому результат сложения не отображается в самой матрице.

Формула разложения, обобщающая формулу (1.9.2), имеет вид

$$\Delta = \text{sim}(i,j) a_{ik,jm} \Delta_{(i+k)(j+m)}(i \rightarrow j) + \Delta(a_{ik,jm}=0), \quad (1.9.4)$$

где $a_{ik,jm}$ – параметр, входящий в четыре позиции матрицы (два раза с положительным знаком и два раза с отрицательным); $\Delta_{(i+k)(j+m)}(i \rightarrow j)$ – суммарный минор [17], то есть определитель матрицы, образованной из первоначальной матрицы в результате следующих преобразований: 1) добавления строки i к строке k и столбца j к столбцу m ; 2) вычеркивания строки i и столбца j ; 3) замены номера i на номер j в обозначениях строк и столбцов полученной матрицы.

Можно предложить другой вариант формулы разложения матричных определителей, когда вычисление знака откладывается до последнего уровня вложенности скобочного выражения, как это имеет место в формуле (1.6.1). Чтобы получить формулу, аналогичную формуле (1.6.1), для разложения матричного определителя, введем понятие неудаляемого элемента матрицы (НЭМ).

Появление НЭМ в позиции (i, j) матрицы на пересечении строки i и столбца j влечет обнуление этих строки и столбца, а также вычеркивание других параметров в позиции (i, j) , в которой должен остаться только этот НЭМ. Численные значения НЭМ принимаются равными единице. С учетом сказанного формулы (1.9.1) или (1.9.2) приводятся к виду

$$\Delta = a_{ij} \Delta(a_{ij} \Rightarrow \text{нэм}) + \Delta(a_{ij}=0), \quad (1.9.5)$$

где $\Delta(a_{ij} \Rightarrow \text{нэм})$ – определитель первоначальной матрицы, в которой элементу a_{ij} придан статус НЭМ.

В результате рекурсивного применения формулы (1.9.5) получают так называемые элементарные матрицы, соответствующие элементарным активным схемам [10] в формуле (1.6.1) и содержащие исключительно НЭМ. Для вычисления определителя элементарной матрицы, равного 1 или -1, можно

использовать либо традиционное алгебраическое правило знаков (установление четности или нечетности числа инверсий в подстановке из номеров строк и столбцов) [17, 23], либо предложенное выше топологическое правило (см. формулу (1.9.2) и пример 1).

Ниже рассмотрено решение предыдущего примера с помощью формулы (1.9.5). НЭМ обозначаются номерами соответствующих строки и столбца.

Пример 2.

$$\begin{aligned}
 \det \begin{bmatrix} \bar{a}_{11} & \bar{b}_{12} & \bar{c}_{13} \\ d_{21} & e_{22} & f_{23} \\ g_{31} & h_{32} & i_{33} \end{bmatrix} &= a \det \begin{bmatrix} \bar{11} & & \\ e_{22} & f_{23} & \\ h_{32} & i_{33} & \end{bmatrix} + b \det \begin{bmatrix} & \bar{12} & \\ d_{21} & f_{23} & \\ g_{31} & i_{33} & \end{bmatrix} + c \det \begin{bmatrix} & & \bar{13} \\ d_{21} & e_{22} & \\ g_{31} & h_{32} & \end{bmatrix} = \\
 &= a(e \det \begin{bmatrix} \bar{11} & & \\ & \bar{22} & \\ & & i_{33} \end{bmatrix} + f \det \begin{bmatrix} \bar{11} & & \\ & & \bar{23} \\ & & & h_{32} \end{bmatrix}) + \\
 &+ b(d \det \begin{bmatrix} & \bar{12} & \\ & & \\ & & i_{33} \end{bmatrix} + f \det \begin{bmatrix} & \bar{12} & \\ & & \bar{23} \\ & & & g_{31} \end{bmatrix}) + \\
 &+ c(d \det \begin{bmatrix} & & \bar{13} \\ & & \\ & & h_{32} \end{bmatrix} + e \det \begin{bmatrix} & & \bar{13} \\ & & \bar{22} \\ & & & g_{31} \end{bmatrix}) = \\
 &= a(e i \det \begin{bmatrix} \bar{11} & & \\ & \bar{22} & \\ & & \bar{33} \end{bmatrix} + f h \det \begin{bmatrix} \bar{11} & & \\ & & \bar{23} \\ & & & \bar{32} \end{bmatrix}) + \\
 &+ b(d i \det \begin{bmatrix} & \bar{12} & \\ & & \\ & & \bar{33} \end{bmatrix} + f g \det \begin{bmatrix} & \bar{12} & \\ & & \bar{23} \\ & & & \bar{31} \end{bmatrix}) + \\
 &+ c(d h \det \begin{bmatrix} & & \bar{13} \\ & & \\ & & \bar{32} \end{bmatrix} + e g \det \begin{bmatrix} & & \bar{13} \\ & & \bar{22} \\ & & & \bar{31} \end{bmatrix}) = \\
 &= a(e i - f h) + b(-d i + f g) + c(d h - e g).
 \end{aligned}$$

Как видно, результатом является вложенное выражение, получение которого не потребовало использования как понятия алгебраического дополнения, так и операции *sim*. Вместе с тем в процессе разложения пришлось рассмотреть столько элементарных матриц, сколько имеется слагаемых в развернутом выражении определителя.

Следует отметить, что понятие НЭМ оказывается полезным и в случае, когда некоторые коэффициенты системы линейных алгебраических уравнений принимают бесконечно большие значения [17]. При этом удастся избежать предварительного решения с символьным заданием таких коэффициентов и последующего предельного перехода для учета их бесконечно больших значений.

Схемные представления в виде определителей схемы и ее миноров позволяют также дать новую более наглядную и эффективную в компьютерной реализации интерпретацию формулам разложения матричных определителей по частям (методы схемных миноров [12], метод объединения строк-подсхем [14]). При этом знак объединения подматриц-подсхем заменяет понятие знака алгебраического дополнения и является порождением двух (а не одного) схемных миноров, что представляется логичным. Вычисление знака и в этих случаях выполняется топологически, что отвечает списочному кодированию элементов матриц [26].

Таким образом, приходим к следующим выводам:

Понятия определителя схемы и ее минора имеют самостоятельное значение в теории электрических цепей, позволяя развивать ее на собственно схемной основе, то есть без использования вспомогательных математических аппаратов матриц и графов.

Схемные представления не только не повторяют матричный язык, но и позволяют видоизменить или усовершенствовать некоторые соотношения для матричных определителей (см. формулы (1.9.2), (1.9.4) и (1.9.5)).

Индуктивное построение схемного определителя в соответствии с формулой (1.6.1) начинается с того, что называются определители простейших схем в виде разомкнутых ветвей и петель, которые выведены из закона Ома (см. рис. 1.3.1).

Схемный определитель в отличие от матричного определителя принципиально не содержит взаимно уничтожающихся слагаемых, которые порождаются расположением параметра элемента схемы в четырех позициях матрицы с разными знаками. Это является следствием вырожденности некоторых подматриц матрицы схемы и требует использования специальных формул (см. формулу (1.9.4)) и алгоритмов.

Наконец, что весьма важно в приложениях, схемный определитель инвариантен к способу задания параметров схемы и для его формирования достаточно списка элементов схемы. В то же время способ задания параметров влияет на выбор матрицы схемы, соответствующих правил ее построения [9, 16, 21] и формул разложения определителя [9, 25].

Следующие два раздела отводятся для детального иллюстрированного рассмотрения и обоснования метода схемных определителей, а также его использования при анализе электрических и электронных цепей в рамках расчетно-графических работ. Однако возможности предлагаемого метода не исчерпываются анализом схем, которые уже рассмотрены и еще будут обсуждаться в данном пособии. Метод схемных определителей реализован В. В. Филаретовым в программах **CIRSYM** и **MATSYM**, предназначенных для формирования символьных схемных функций сложных электронных цепей и аналитического решения систем линейных алгебраических уравнений высокого порядка (см. Интернет-сайт <http://astrometric.sai.msu.ru/~symbol/>).

2. МЕТОД СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ В ТАБЛИЦАХ И РИСУНКАХ

2.1. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ПО ОСВОЕНИЮ МСО

Графические иллюстрации и примеры, как известно, способствуют более быстрому освоению методов анализа электрических цепей. Поэтому представим здесь потенциальные возможности метода схемных определителей (МСО) в виде таблиц и схем. Предлагаемые иллюстрации необходимо разделить на основные и вспомогательные. К основным иллюстрациям относятся схемно-алгебраические формулы ССФ в табл. 2.1.1, формулы выделения параметров базовых элементов в табл. 2.1.9 и формулы разложения определителей схем делением на части (см. строки 1 и 2 табл. 2.1.12), а также определители некоторых элементарных схем. К таким схемам относятся, например, одиночный узел (см. строку 1 табл. 2.1.4), НУИ-контур (см. строку 10 табл. 2.1.4) и схема, состоящая из двух и более несвязных подсхем (см. строку 1 табл. 2.1.7). Основных формул достаточно, чтобы провести анализ любой линейной электронной цепи. Все остальные приведенные в этом разделе иллюстрации (см. табл. 2.1.2-2.1.8, 2.1.10-2.1.13) являются вспомогательными, легко выводятся с помощью основных формул и отражают частные варианты преобразования схемно-алгебраических выражений (САВ). Эти преобразования ускоряют процесс получения ССФ, при этом они очень просты и быстро запоминаются. Более того, вывод этих формул может быть использован в качестве упражнений для освоения МСО.

Рекомендуется начинать изучение метода схемных определителей с запоминания табл. 2.1.1; 1, 2, 3, 4, 5, 10 строк из табл. 2.1.4 и первых двух строк табл. 2.1.9, что достаточно для анализа простых схем без управляемых источников.

Глубокое овладение МСО схемных определителей вовсе не требует формального запоминания 13 таблиц, помещенных ниже. После внимательного их рассмотрения объем информации, требующей запоминания, сократится в несколько раз. Например, наиболее объемные табл. 2.1.10 и 2.1.11 являются следствиями табл. 2.1.9 и 2.1.5. Содержание табл. 2.1.5 и 2.1.6 обуславливают фундаментальные физические свойства элементов схемы и законы Кирхгофа, которые безусловно должен знать каждый студент. Для проверки студентами правильности схемно-алгебраических выражений, помещенных в третий столбец табл. 2.1.13, используются схемы замещения, приведенные в первом столбце. Эта таблица может быть расширена читателем (студентом) путем добавления в нее новых схемных элементов и соответствующих схемно-алгебраических выражений.

Таблица 2.1.1. Схемно-алгебраические формулы (САФ) схемных функций

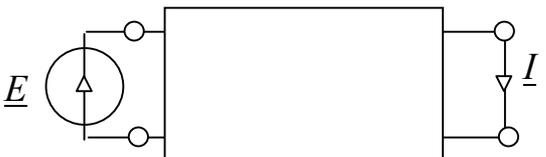
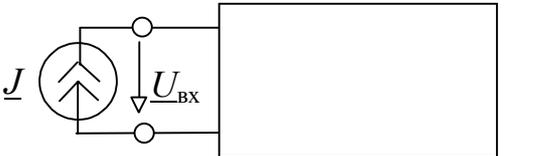
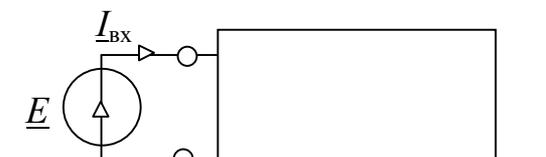
№	Исходная схема	САФ
1	Коэффициент передачи по напряжению	
		$K_{EU} = \underline{U} / \underline{E} = \frac{\left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right }{\left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right }$
2	Передаточная проводимость	
		$Y_{EI} = \underline{I} / \underline{E} = \frac{\left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right }{\left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right }$
3	Передаточное сопротивление	
		$Z_{JU} = \underline{U} / \underline{J} = \frac{\left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right }{\left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right }$
4	Коэффициент передачи по току	
		$B_{JI} = \underline{I} / \underline{J} = \frac{\left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right }{\left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right }$
5	Входное сопротивление	
		$Z_{JU} = \underline{U}_{\text{вх}} / \underline{J} = \frac{\left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right }{\left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right }$
6	Входная проводимость	
		$Y_{EI} = \underline{I}_{\text{вх}} / \underline{E} = \frac{\left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right }{\left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \right }$

Таблица 2.1.2. Объединение схемных элементов

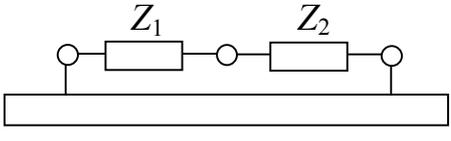
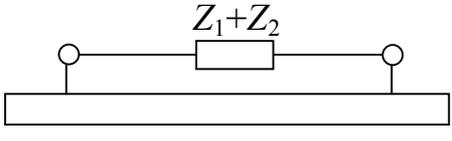
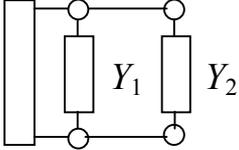
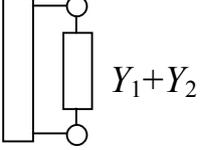
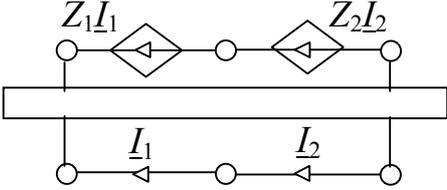
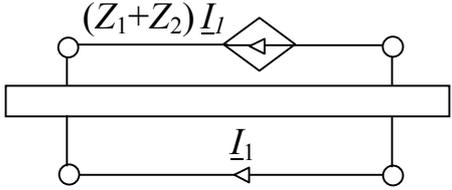
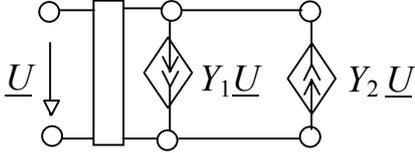
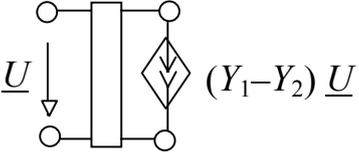
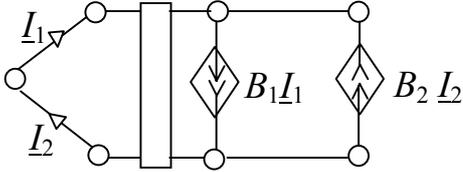
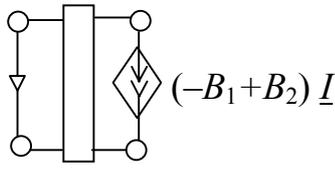
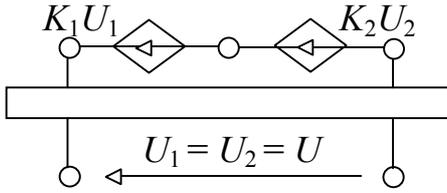
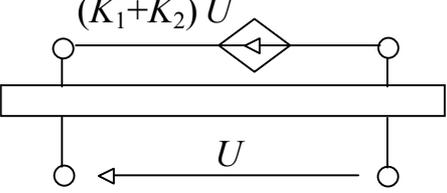
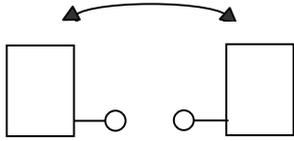
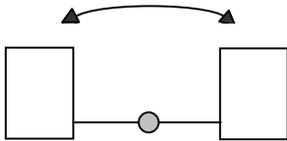
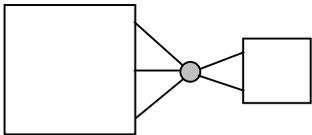
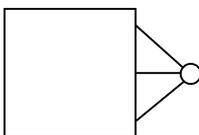
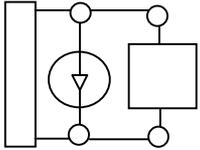
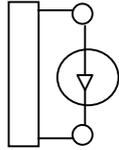
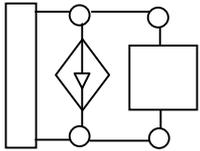
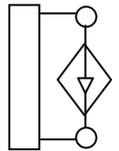
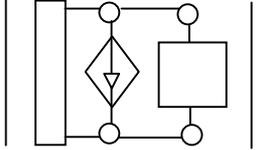
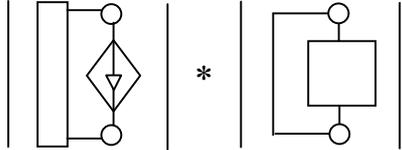
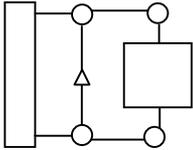
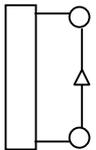
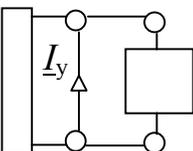
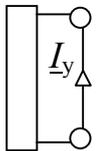
№	Исходная схема	Эквивалентная схема
1	Последовательное соединение z-ветвей	
		
2	Параллельное соединение y-ветвей	
		
3	Последовательное соединение ИНУТ	
		
4	Параллельное соединение ИТУН	
		
5	Последовательно-параллельное соединение ИТУТ	
		
6	Параллельно-последовательное соединение ИНУН	
		

Таблица 2.1.3. Эквивалентные упрощения (преобразования) схем перед нахождением схемных функций

№	Исходная схема	Эквивалентная схема
1	2	3
1	Объединение двух подсхем с управляющими связями между ними в одну подсхему	
		
2	Удаление подсхемы, имеющей один общий узел со схемой	
		
3	Удаление двухполюсника, параллельного независимому источнику напряжения	
		
4	Удаление двухполюсника, параллельного управляемому источнику напряжения	
		
4*	Разложение определителя схемы с двухполюсником, который соединен параллельно управляемому источнику напряжения	
		
5	Удаление двухполюсника, параллельного приемнику тока – амперметру	
		
6	Удаление двухполюсника, параллельного приемнику тока УИ	
		

Окончание табл. 2.1.3

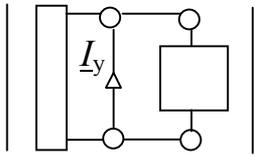
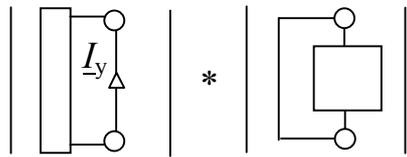
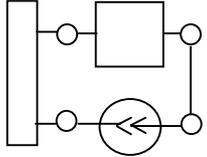
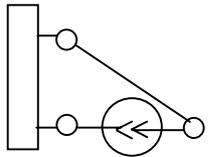
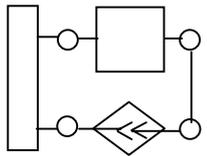
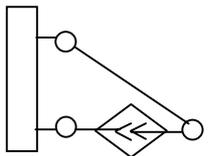
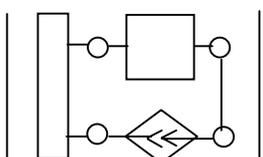
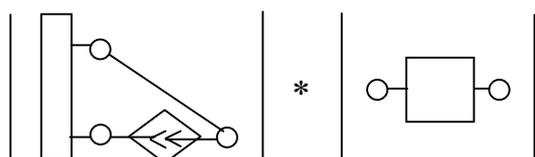
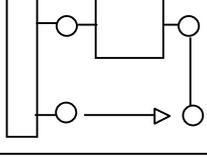
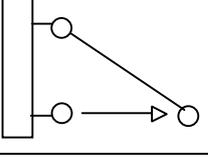
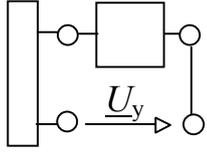
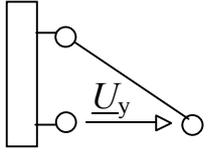
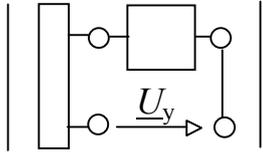
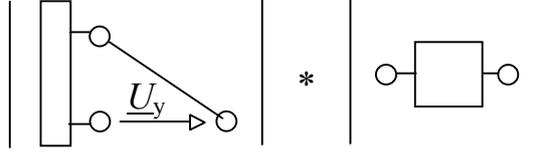
1	2	3
6*	Получение определителя схемы с двухполюсником, параллельным приемнику тока УИ	
		
7	Стягивание двухполюсника, соединенного последовательно с независимым источником тока	
		
8	Стягивание двухполюсника, соединенного последовательно с управляемым источником тока	
		
8*	Разложение определителя схемы с двухполюсником, соединенным последовательно с управляемым источником тока	
		
9	Стягивание двухполюсника, соединенного последовательно с приемником напряжения – вольтметром	
		
10	Стягивание двухполюсника, соединенного последовательно с приемником напряжения УИ	
		
10*	Разложение определителя схемы с двухполюсником, соединенным последовательно с приемником напряжения УИ	
		

Таблица 2.1.4. Определители простейших схем

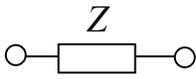
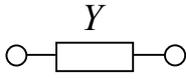
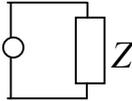
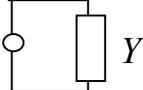
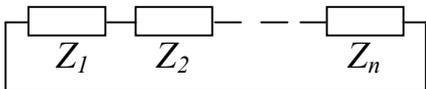
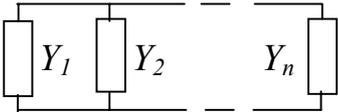
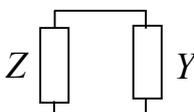
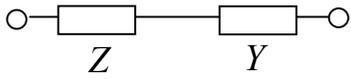
№	Схема, отображающая определитель	Величина определителя
1	Схема, состоящая из одного узла	
		$\Delta=1$
2	Разомкнутая ветвь с сопротивлением Z	
		$\Delta=1$
3	Разомкнутая ветвь с проводимостью Y	
		$\Delta=Y$
4	Замкнутая ветвь (петля) с сопротивлением Z	
		$\Delta=Z$
5	Замкнутая ветвь (петля) с проводимостью Y	
		$\Delta=1$
6	Схема-контур из сопротивлений	
		$\Delta=Z_1+Z_2+\dots+Z_n$
7	Схема - параллельное соединение проводимостей	
		$\Delta=Y_1+Y_2+\dots+Y_n$
8	Схема-контур из сопротивления Z и проводимости Y	
		$\Delta=ZY+1$
9	Разомкнутая ZY -ветвь	
		$\Delta=Y$
10	Простейшие схемы с неудаляемым управляемым источником (НУИ)	
		$\Delta = 1$ и $\Delta = -1$

Таблица 2.1.5. Условия вырождения и нейтрализации элементов при замыкании и размыкании

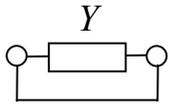
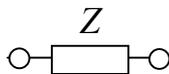
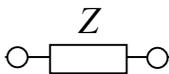
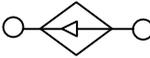
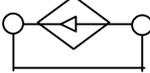
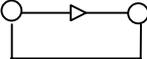
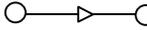
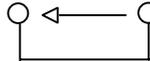
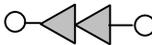
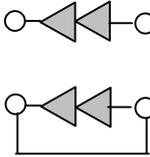
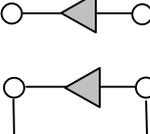
Элемент схемы	Вырождение	Нейтрализация
	Нет	
	Нет	
		
		
		
		
		Нет
		Нет

Таблица 2.1.6. Следствия параллельного и последовательного соединения элементов

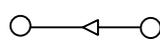
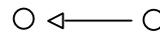
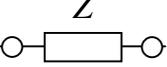
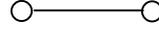
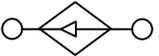
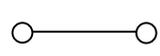
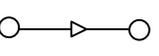
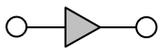
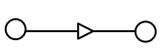
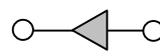
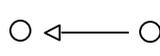
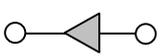
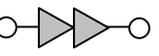
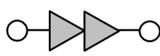
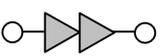
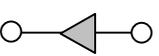
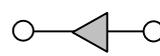
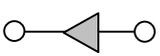
Элемент схемы	Соединение элемента			
	параллельное		последовательное	
				
			Выделение Y	
			Выделение Z	
	$\Delta=0$			
		$\Delta=0$		
			$\Delta=0$	
				$\Delta=0$
	$\Delta=0$		$\Delta=0$	
		$\Delta=0$		$\Delta=0$

Таблица 2.1.7. Условия вырождения схем ($\Delta=0$)

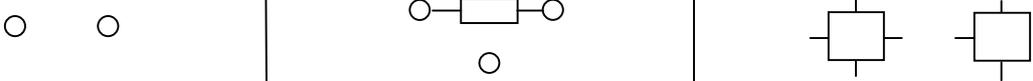
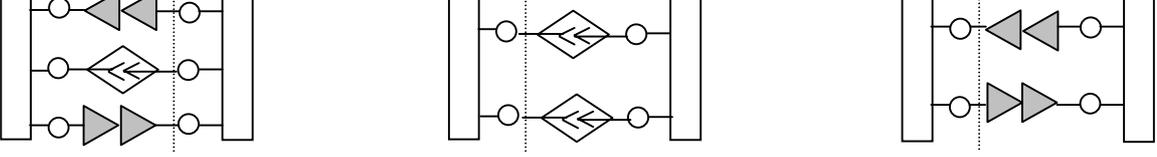
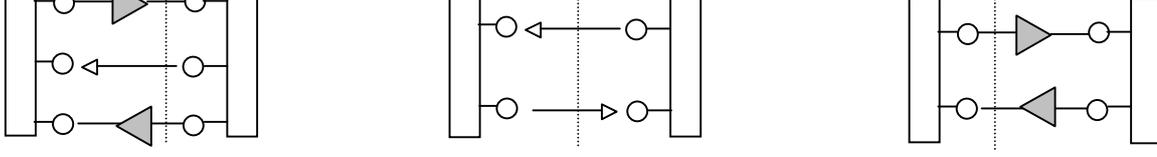
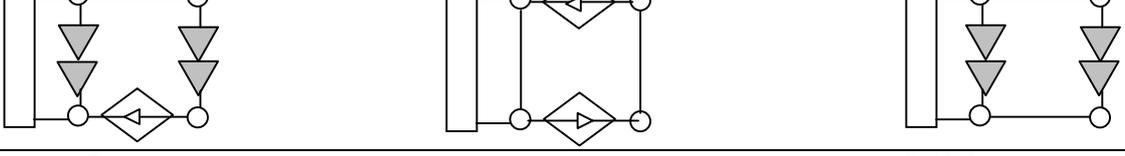
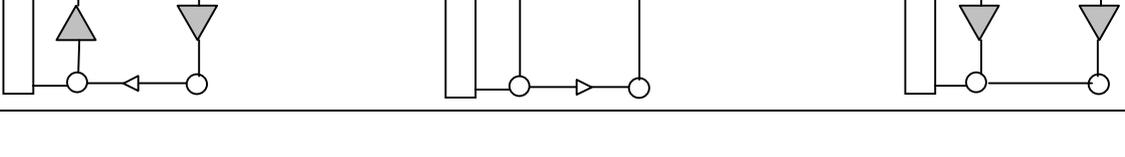
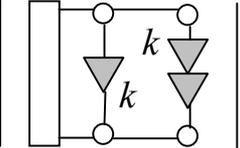
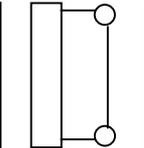
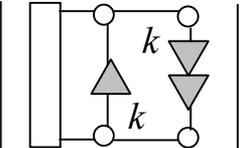
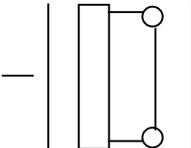
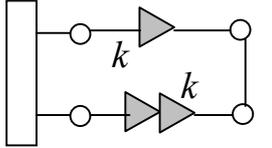
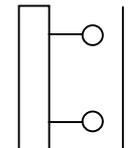
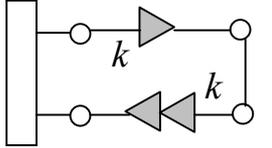
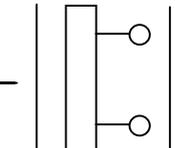
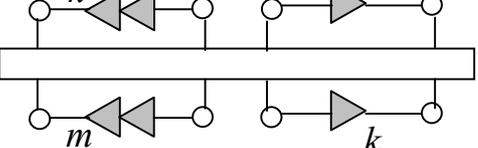
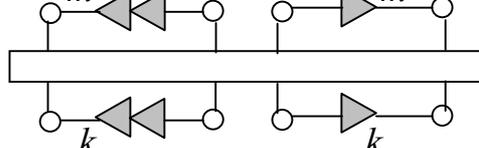
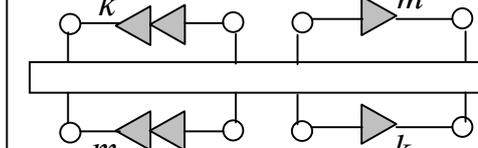
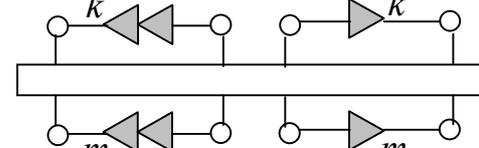
№	Классы схем
1	<p data-bbox="459 286 1214 315">Схемы, состоящие из двух и более несвязных подсхем</p> 
2	<p data-bbox="443 430 1225 459">Схемы с разомкнутым или замкнутым генератором НУИ</p> 
3	<p data-bbox="443 586 1225 616">Схемы с разомкнутым или замкнутым приемником НУИ</p> 
4	<p data-bbox="355 743 1313 772">Схемы с замкнутыми генератором напряжения или приемником тока</p> 
5	<p data-bbox="339 900 1329 929">Схемы с разомкнутыми генератором тока или приемником напряжения</p> 
6	<p data-bbox="387 1057 1281 1086">Схемы с сечением из генераторов тока и (или) генераторов НУИ</p> 
7	<p data-bbox="339 1326 1329 1355">Схемы с сечением из приемников напряжения и (или) приемников НУИ</p> 
8	<p data-bbox="339 1594 1329 1624">Схемы с контуром из генераторов напряжения и (или) генераторов НУИ</p> 
9	<p data-bbox="387 1863 1281 1892">Схемы с контуром из приемников тока и (или) приемников НУИ</p> 

Таблица 2.1.8. Преобразование определителей схем с НУИ

№	Исходное схемно-алгебраическое выражение	Эквивалентное схемно-алгебраическое выражение
1	2	3
1	Замещение проводником однонаправленного параллельного соединения генератора и приемника НУИ	
		
2	Замещение проводником противоположнонаправленного параллельного соединения генератора и приемника НУИ	
		
3	Исключение встречного последовательного соединения генератора и приемника НУИ	
		
4	Исключение согласного последовательного соединения генератора и приемника НУИ	
		
5	Взаимная замена номеров у генераторов НУИ	
		
6	Взаимная замена номеров у приемников НУИ	
		

Окончание табл. 2.1.8.

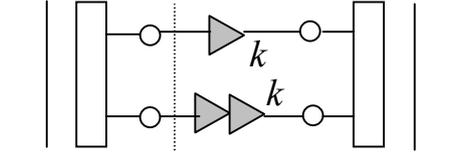
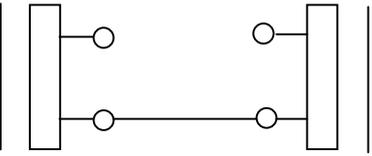
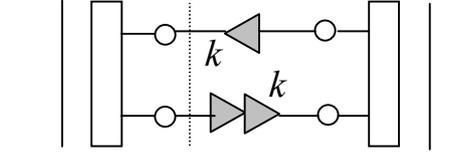
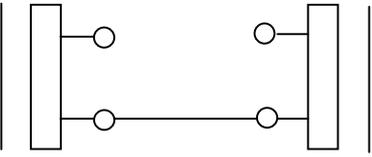
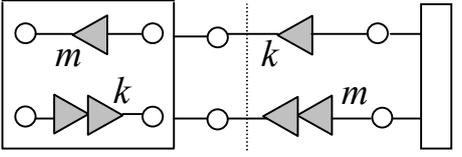
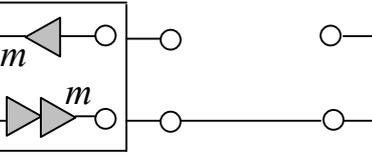
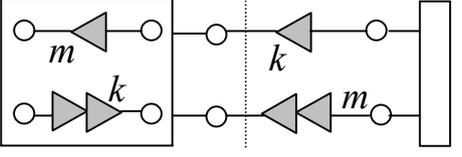
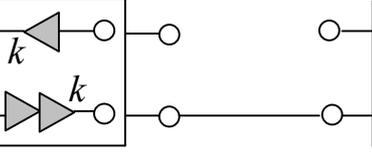
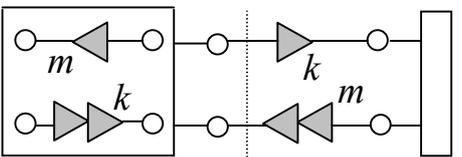
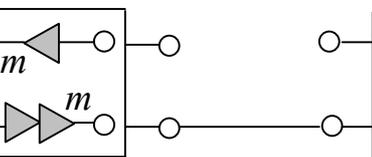
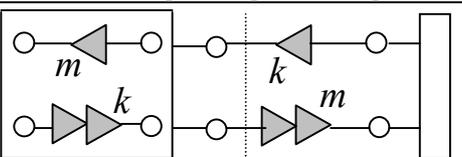
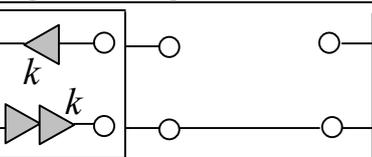
1	2	3
7	Выделение НУИ, расположенного в сечении при согласной ориентации генератора и приемника	
		
8	Выделение НУИ, расположенного в сечении при встречной ориентации генератора и приемника	
		
9	Выделение НУИ, генератор которого находится вне сечения при согласной ориентации генератора и приемника разноименных НУИ	
		
10	Выделение НУИ, приемник которого находится вне сечения при согласной ориентации генератора и приемника разноименных НУИ	
		
11	Выделение НУИ, генератор которого находится вне сечения при встречной ориентации генератора и приемника разноименных НУИ	
		
12	Выделение НУИ, приемник которого находится вне сечения при встречной ориентации генератора и приемника разноименных НУИ	
		

Таблица 2.1.9. Формулы выделения параметров базовых элементов

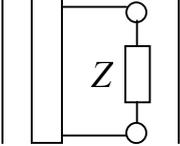
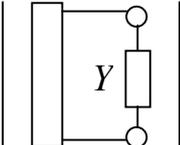
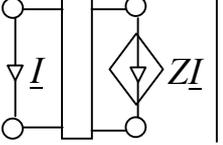
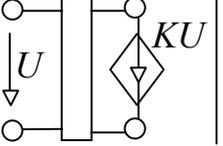
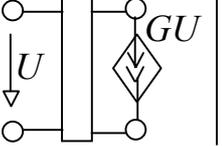
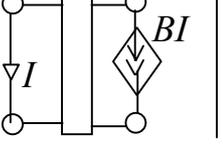
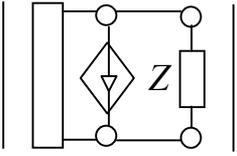
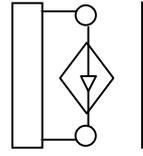
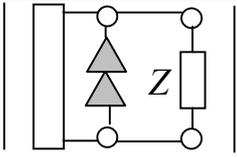
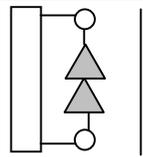
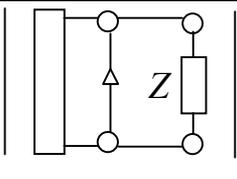
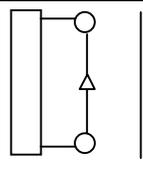
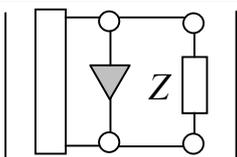
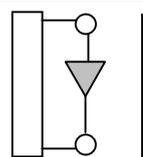
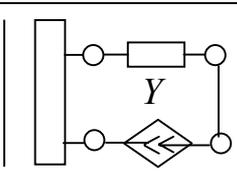
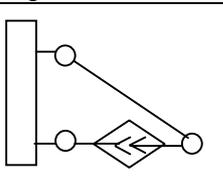
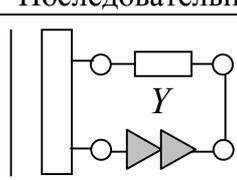
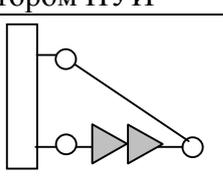
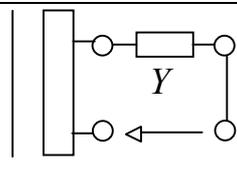
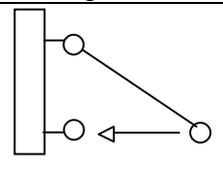
№	Исходное схемно-алгебраическое выражение	Эквивалентное схемно-алгебраическое выражение
1		<p style="text-align: center;">Выделение параметра z-ветви</p> $Z * \left[\begin{array}{ c } \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ c } \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right]$
2		<p style="text-align: center;">Выделение параметра y-ветви</p> $Y * \left[\begin{array}{ c } \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ c } \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right]$
3		<p style="text-align: center;">Выделение параметра ИНУТ</p> $Z * \left[\begin{array}{ c } \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ c } \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right]$
4		<p style="text-align: center;">Выделение параметра ИНУН</p> $K * \left[\begin{array}{ c } \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ c } \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right]$
5		<p style="text-align: center;">Выделение параметра ИТУН</p> $G * \left[\begin{array}{ c } \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ c } \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right]$
6		<p style="text-align: center;">Выделение параметра ИТУТ</p> $B * \left[\begin{array}{ c } \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right] + \left[\begin{array}{ c } \hline \text{---} \\ \hline \end{array} \right]$

Таблица 2.1.10. Частные случаи выделения параметров элементов

№	Исходное схемно-алгебраическое выражение	Эквивалентное схемно-алгебраическое выражение
1	2	3
1	Параллельное соединение z -ветви с генератором напряжения	
		Z^* 
2	Параллельное соединение z -ветви с генератором НУИ	
		Z^* 
3	Параллельное соединение z -ветви с приемником тока	
		Z^* 
4	Параллельное соединение z -ветви с приемником НУИ	
		Z^* 
5	Последовательное соединение y -ветви с генератором тока	
		Y^* 
6	Последовательное соединение y -ветви с генератором НУИ	
		Y^* 
7	Последовательное соединение y -ветви с приемником напряжения	
		Y^* 

Окончание табл. 2.1.10

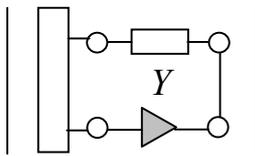
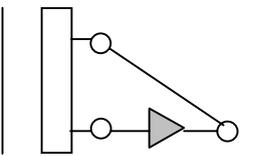
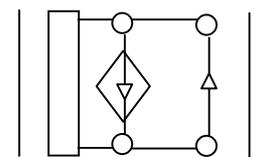
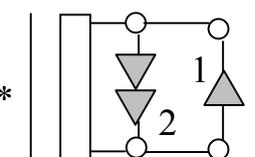
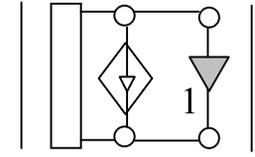
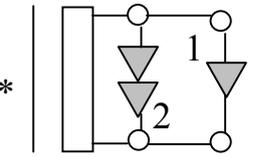
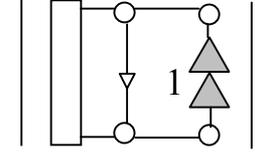
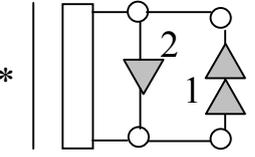
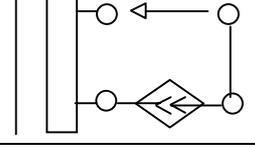
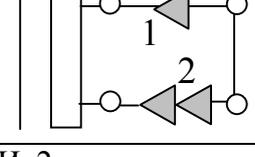
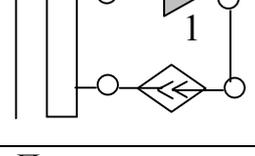
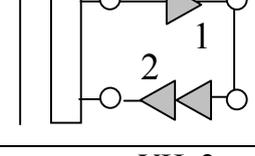
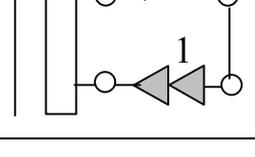
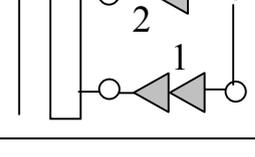
1	2	3
8	Последовательное соединение u -ветви с приемником НУИ	
		$Y *$ 
9	Параллельное соединение генератора напряжения УИ-1 с параметром A и приемника тока УИ-2 с параметром B	
		$A * B *$ 
10	Параллельное соединение генератора напряжения УИ-2 с параметром A и приемника НУИ-1	
		$A *$ 
11	Параллельное соединение приемника тока УИ-2 с параметром A и генератора НУИ-1	
		$A *$ 
12	Последовательное соединение приемника напряжения УИ-1 с параметром A и генератора тока УИ-2 с параметром B	
		$A * B *$ 
13	Последовательное соединение генератора тока УИ-2 с параметром A и приемника НУИ-1	
		$A *$ 
14	Последовательное соединение приемника напряжения УИ-2 с параметром A и генератора НУИ-1	
		$A *$ 

Таблица 2.1.11. Эквивалентные упрощения схем в результате нейтрализации элементов

№	Исходное САВ	Эквивалентное САВ
1	2	3
1	Удаление y -ветви, включенной параллельно генератору напряжения	
2	Удаление y -ветви, включенной параллельно генератору нуи	
3	Удаление y -ветви, включенной параллельно приемнику тока	
4	Удаление y -ветви, включенной параллельно приемнику нуи	
5	Стягивание z -ветви, включенной последовательно с генератором тока	
6	Стягивание z -ветви, включенной последовательно с генератором нуи	
7	Стягивание z -ветви, последовательной приемнику напряжения	
8	Стягивание z -ветви, включенной последовательно с приемником нуи	

Окончание табл. 2.1.11

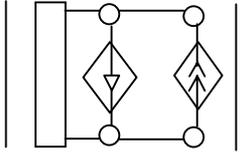
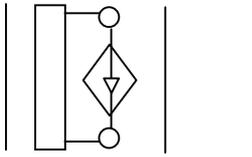
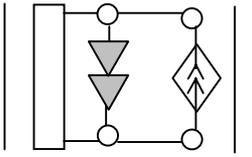
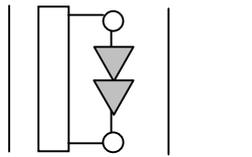
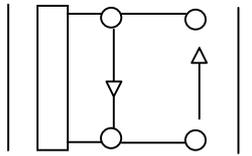
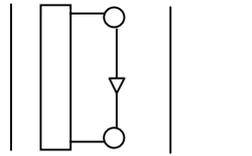
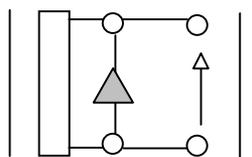
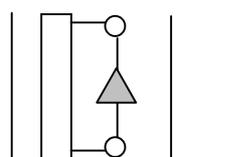
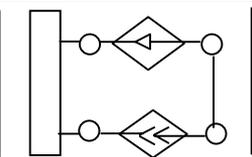
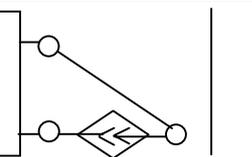
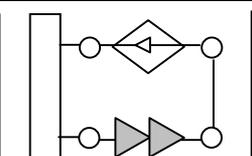
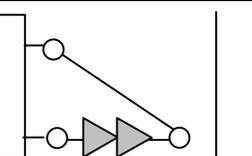
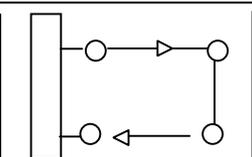
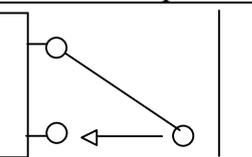
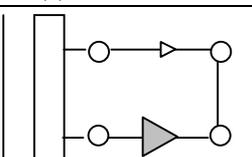
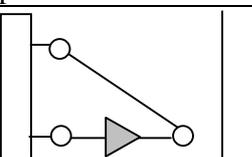
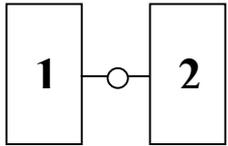
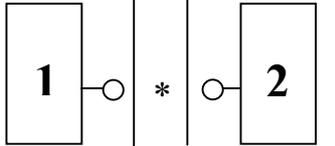
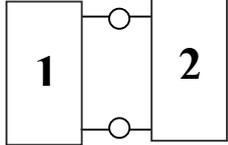
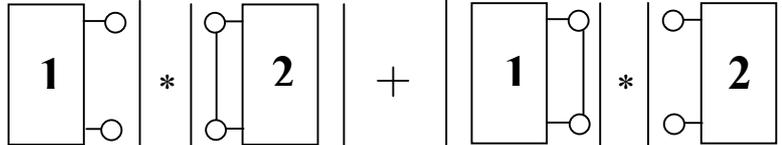
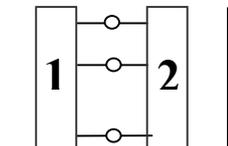
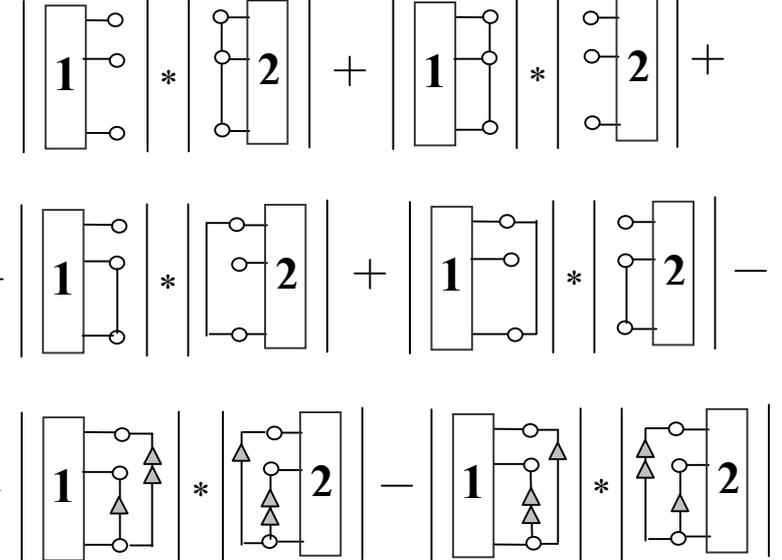
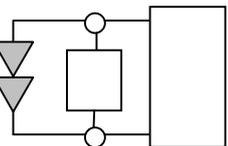
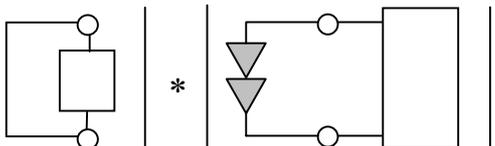
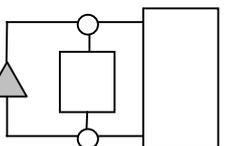
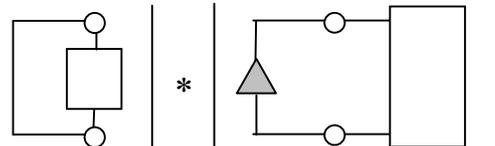
1	2	3
9	Параллельное соединение генератора тока с генератором напряжения	
		
10	Параллельное соединение генератора тока с генератором НУИ	
		
11	Параллельное соединение приемника напряжения с приемником тока	
		
12	Параллельное соединение приемника напряжения с приемником НУИ	
		
13	Последовательное соединение генератора напряжения и генератора тока	
		
14	Последовательное соединение генератора напряжения и генератора НУИ	
		
15	Последовательное соединение приемника тока с приемником напряжения	
		
16	Последовательное соединение приемника тока с приемником НУИ	
		

Таблица 2.1.12. Разложение определителей схем делением их на части

№	Исходное схемно-алгебраическое выражение	Эквивалентное схемно-алгебраическое выражение
1	2	3
1	Схема делится на две подсхемы по одному узлу	
		
2	Схема делится на две подсхемы по двум узлам	
		
3	Схема делится на две подсхемы по трем узлам	
		
4	Выделение двухполюсника, параллельного генератору НУИ	
		
5	Выделение двухполюсника, параллельного приемнику НУИ	
		

Окончание табл. 2.1.12

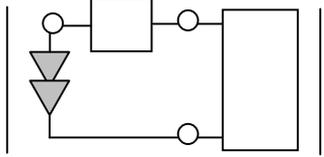
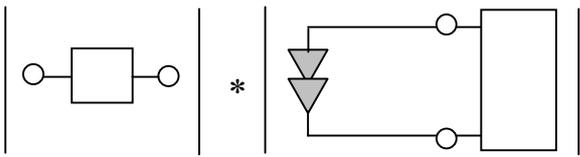
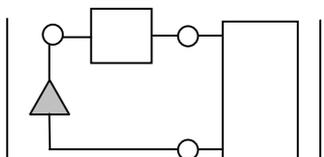
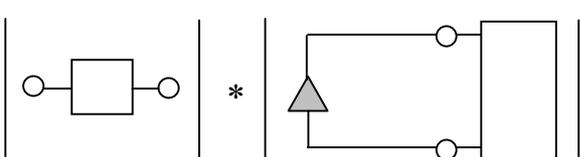
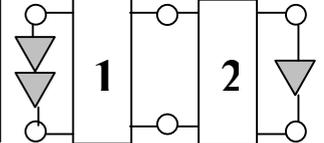
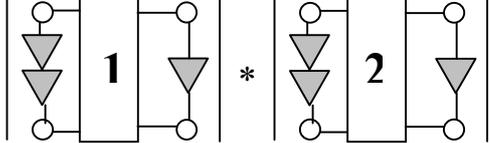
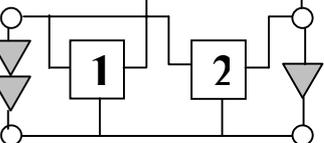
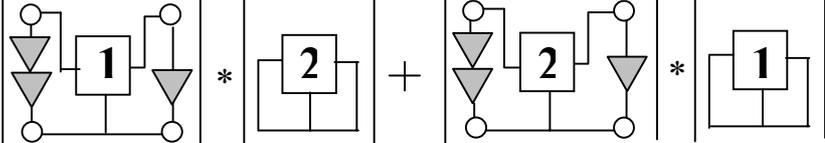
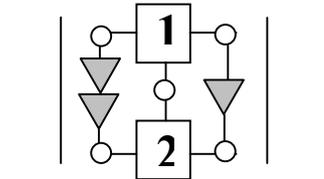
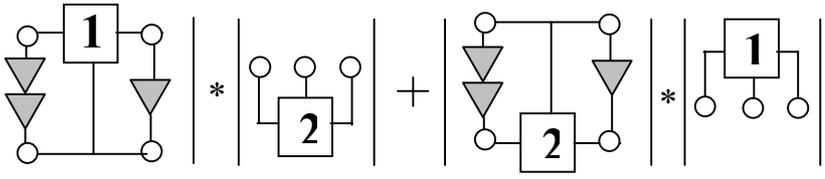
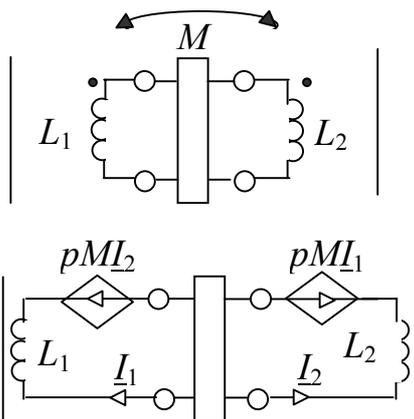
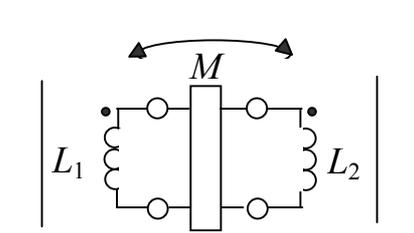
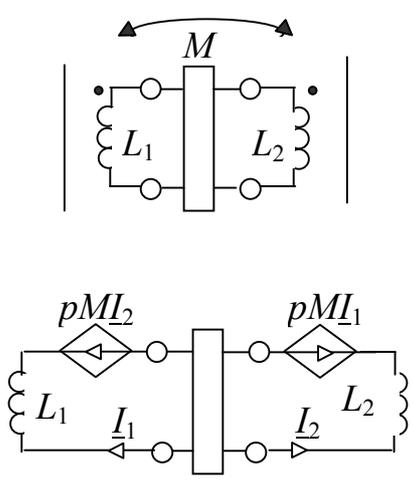
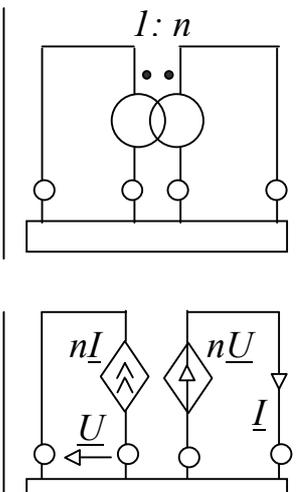
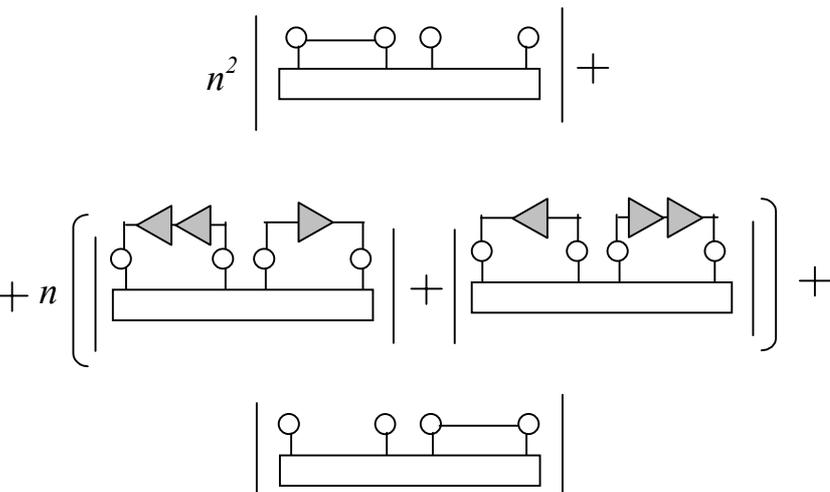
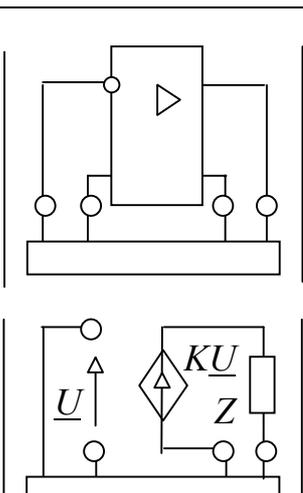
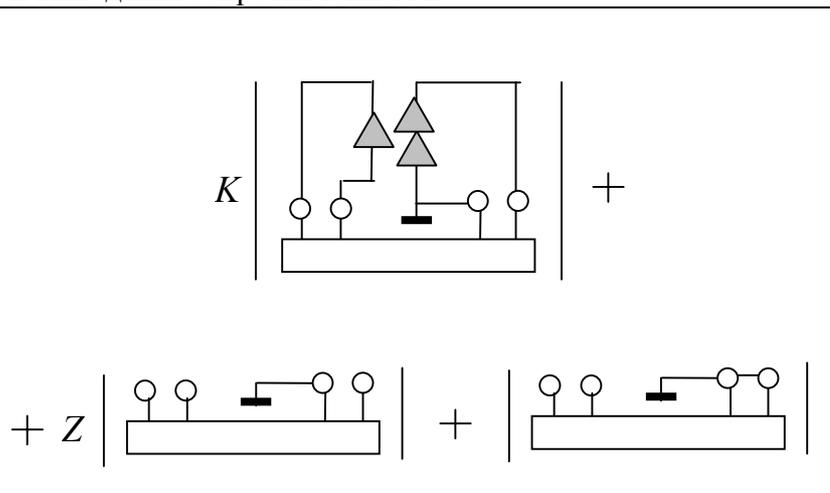
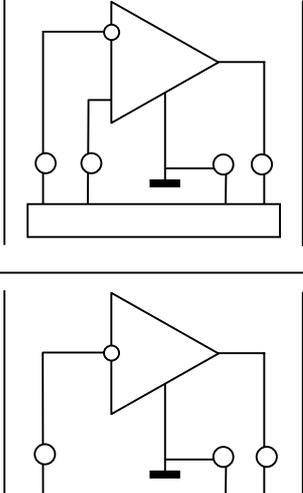
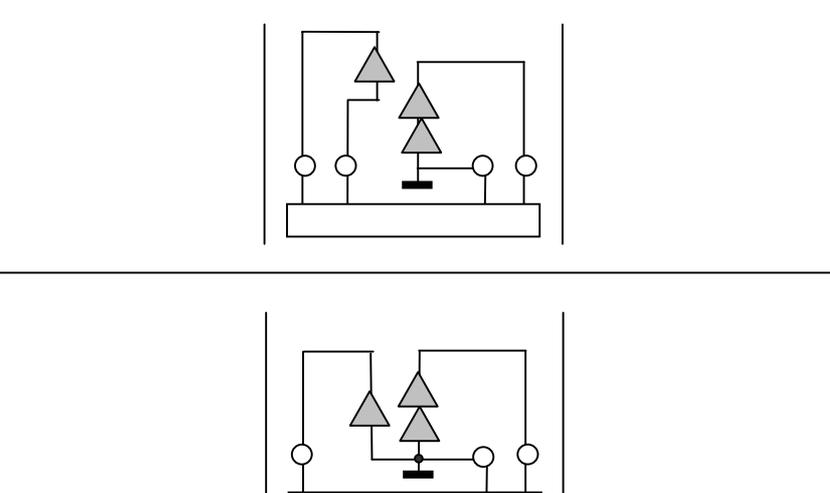
1	2	3
6	Выделение двухполюсника, соединенного последовательно с генератором НУИ	
		
7	Выделение двухполюсника, соединенного последовательно с приемником НУИ	
		
8	Нахождение числителя передаточной схемной функции при каскадном соединении двух четырехполюсников	
		
9	Нахождение числителя передаточной схемной функции при параллельном соединении двух трехполюсников	
		
10	Нахождение числителя передаточной схемной функции при последовательном соединении двух трехполюсников	
		

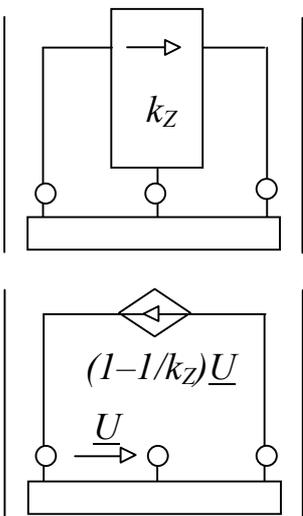
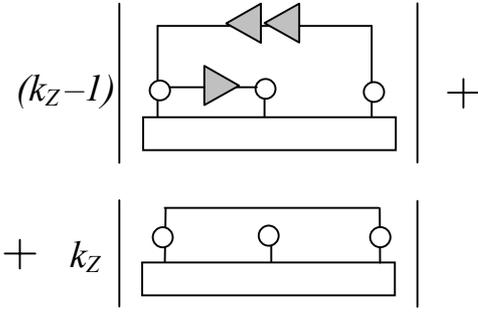
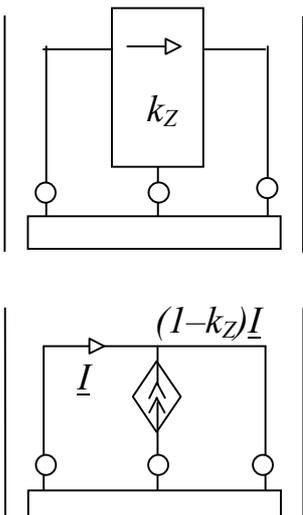
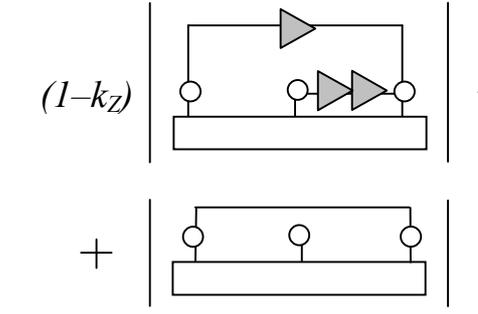
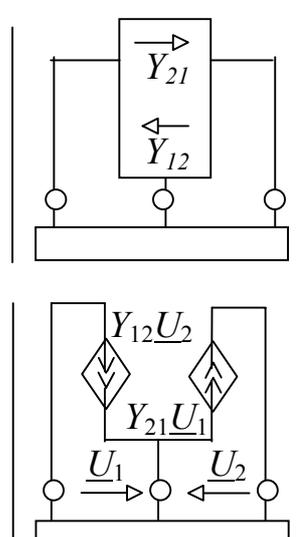
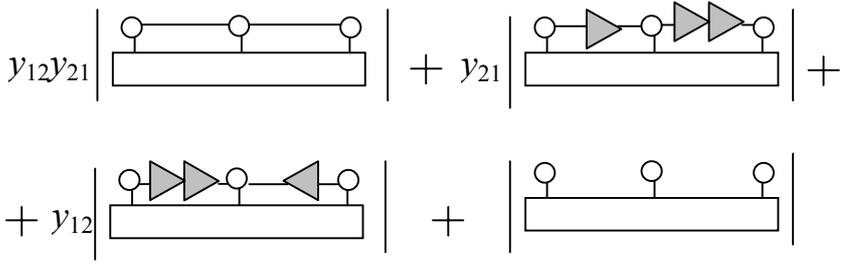
Таблица 2.1.13. Дополнительные схемно-алгебраические формулы выделения параметров

№	Исходное схемно-алгебраическое выражение	Эквивалентное схемно-алгебраическое выражение
1	2	3
1	Выделение параметра индуктивно связанных катушек	
		$-p^2 M^2 \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ \text{---} \end{array} \right + pM \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ \text{---} \end{array} \right +$ $+ pM \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ \text{---} \end{array} \right + \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ \text{---} \end{array} \right $
2	Выделение параметра индуктивно связанных катушек во взаимной цепи	
		$-p^2 M^2 \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ \text{---} \end{array} \right + 2pM \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ \text{---} \end{array} \right +$ $+ \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ \text{---} \end{array} \right $
3	Выделение всех параметров двух взаимно связанных катушек	
		$(p^2(L_1L_2 - M^2)) \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ \text{---} \end{array} \right + \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ \text{---} \end{array} \right +$ $+ pM \left(\left \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ \text{---} \end{array} \right + \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ \text{---} \end{array} \right \right) +$ $+ pL_1 \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ \text{---} \end{array} \right + pL_2 \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ \text{---} \end{array} \right $

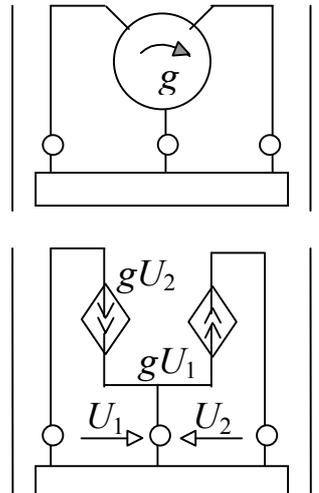
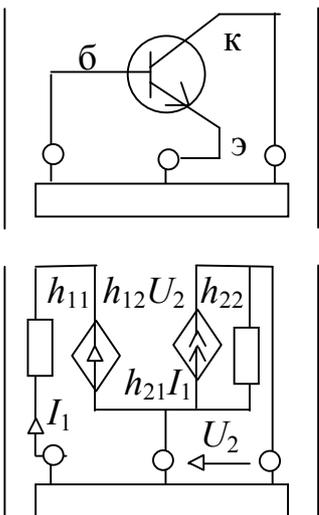
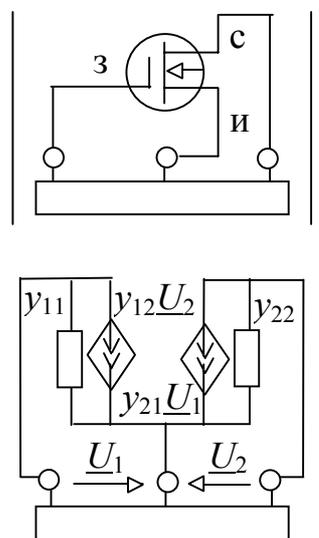
Продолжение табл. 2.1.13

1	2	3
4	<p style="text-align: center;">$1:n$</p> 	<p style="text-align: center;">Идеальный трансформатор</p> 
5	<p style="text-align: center;">Операционный усилитель с конечным коэффициентом усиления K и выходным сопротивлением Z</p> 	<p style="text-align: center;">Операционный усилитель с конечным коэффициентом усиления K и выходным сопротивлением Z</p> 
6	<p style="text-align: center;">Идеальный операционный усилитель</p> 	<p style="text-align: center;">Идеальный операционный усилитель</p> 

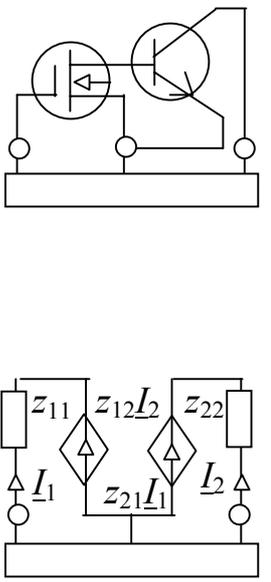
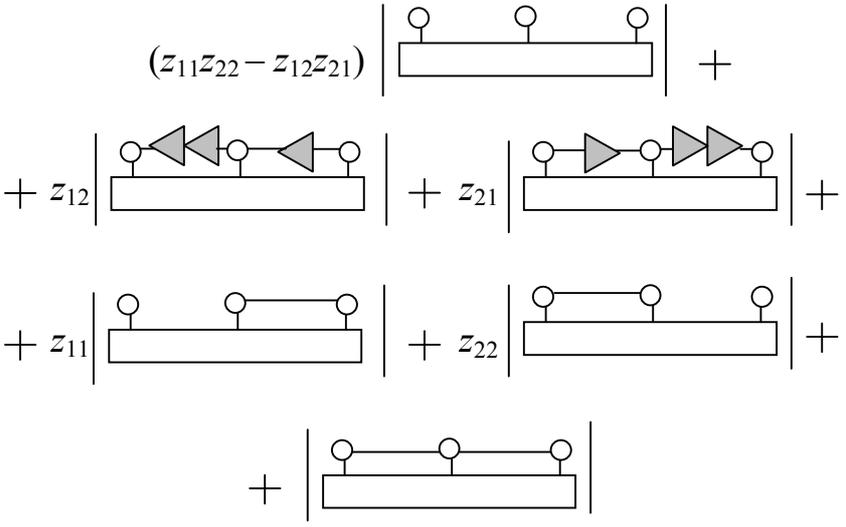
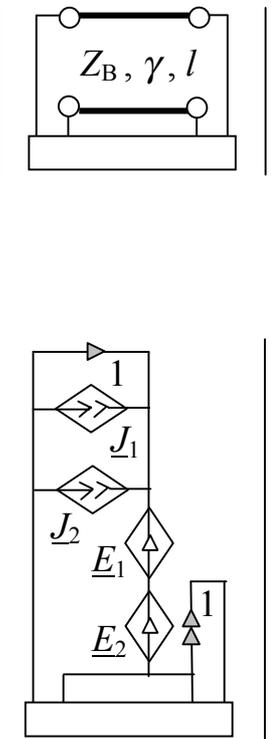
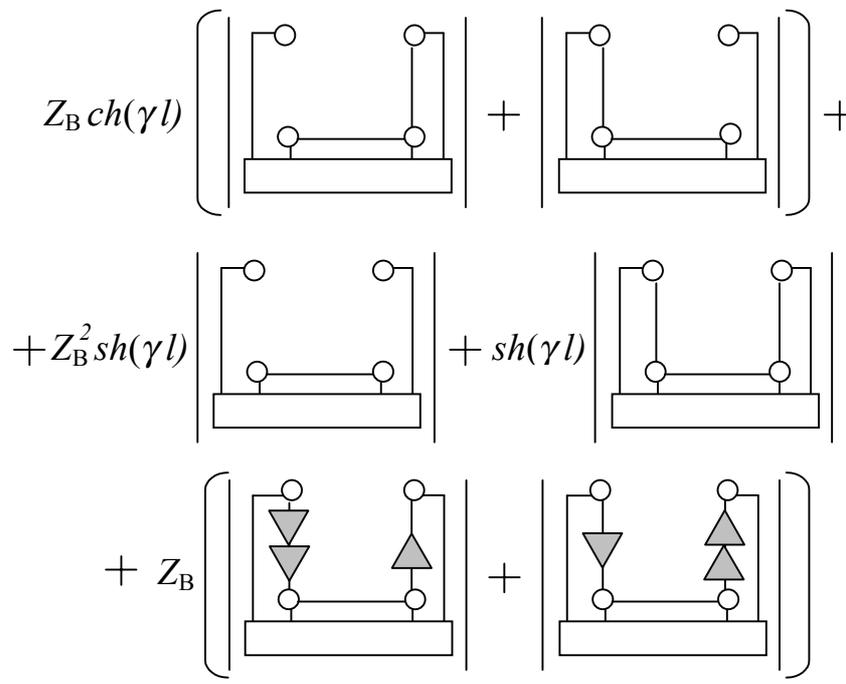
Продолжение табл. 2.1.13

1	2	3
7	<p style="text-align: center;">Идеальный конвертор сопротивления с преобразованием напряжения (КСПН)</p> 	
8	<p style="text-align: center;">Идеальный конвертор сопротивления с преобразованием тока (КСПТ)</p> 	
9	<p style="text-align: center;">Идеальный инвертор сопротивления</p> 	

Продолжение табл. 2.1.13

1	2	3
10		<p style="text-align: center;">Идеальный гиратор</p> $g^2 \left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right + \left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right +$ $+ g \left\{ \left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right + \left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right \right\}$
11	<p style="text-align: center;">Низкочастотный биполярный транзистор с h-параметрами</p> 	$(h_{11}h_{22} - h_{12}h_{21}) \left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right +$ $+ h_{12} \left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right + h_{21} \left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right +$ $+ h_{11} \left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right + h_{22} \left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right +$ $+ \left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right $
12	<p style="text-align: center;">Биполярный, полевой, составной транзистор с y-параметрами</p> 	$(y_{11}y_{22} - y_{12}y_{21}) \left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right +$ $+ y_{12} \left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right + y_{21} \left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right +$ $+ y_{11} \left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right + y_{22} \left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right +$ $+ \left \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right $

Окончание табл. 2.1.13

1	2	3
13	<p style="text-align: center;">Составной транзистор, представленный z-параметрами</p> 	 $(z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}) \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right +$ $+ z_{12} \left \begin{array}{c} \leftarrow \leftarrow \\ \text{---} \end{array} \right + z_{21} \left \begin{array}{c} \rightarrow \rightarrow \\ \text{---} \end{array} \right +$ $+ z_{11} \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right + z_{22} \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right +$ $+ \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right $
14	<p style="text-align: center;">Длинная (передающая) линия</p> 	 $Z_B \operatorname{ch}(\gamma l) \left(\left \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right + \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right \right) +$ $+ Z_B^2 \operatorname{sh}(\gamma l) \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right + \operatorname{sh}(\gamma l) \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right +$ $+ Z_B \left(\left \begin{array}{c} \nabla \nabla \\ \text{---} \end{array} \right + \left \begin{array}{c} \nabla \nabla \\ \text{---} \end{array} \right \right)$

2.2. СХЕМНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ СХЕМНЫХ ФУНКЦИЙ

Табл. 2.1.1 содержит схемно-алгебраические формулы схемных функций, использующие НУИ. Они аналогичны предложенным Брауном схемным формулам на основе ориентированных нуллов [7]. Пример вывода одной из формул (см. строку 2 табл. 2.1.1) помещен в подразделе 1.4. Предложенное здесь доказательство не требует использования понятий матричной алгебры. В то же время доказательство Брауна опирается на то обстоятельство, что подключение к двум узлам схемы норатора (нуллатора) влечет объединение соответствующих этим узлам строк (столбцов) матрицы схемы.

Следует подчеркнуть, что в случае изменения направления передачи напряжения или тока (с выхода на вход) генератор и приемник НУИ в строках 1–4 табл. 2.1.1 меняются местами. Как известно, для взаимной цепи соответствующие функции попарно равны, а для активной (невзаимной) эти функции отличаются друг от друга.

Обозначения генератора и приемника НУИ напоминают, соответственно, обозначения норатора и нуллатора нуллора, а именно, символы бесконечности и нуля выполнены в виде стрелок. Вместе с тем понятие НУИ обобщает понятия нуллора и ориентированного нуллора, поскольку параметру НУИ при необходимости вместо значения, равного единице, можно присвоить значение параметра χ выделяемого элемента схемы. Тогда определитель исходной схемы представляется в виде суммы определителей первой и второй производных схем (см. формулу 1.6.1). Это отличает НУИ от обычного нуллора и ориентированного нуллора которые сами по себе не имеют параметров, а моделируют операционный усилитель (ОУ) с коэффициентом усиления, равным бесконечности. Возможно, поэтому Браун, сформулировав схемные выражения для нахождения схемных функций, ограничился их применением для анализа схем с двухполюсниками и идеальными ОУ [7]. Это не позволило методу Брауна успешно конкурировать с матричными и графовыми методами, предусматривающими задание управляемых источников (УИ), что в конечном счете привело к забвению этого метода на десятилетия.

2.3. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И УПРОЩЕНИЯ СХЕМ

В табл. 2.1.2 приводятся известные правила упрощения последовательного, параллельного, последовательно-параллельного и параллельно-последовательного соединений элементов. Вывод этих формул проводится на основе законов Кирхгофа.

В строке 1 табл. 2.1.3 содержится операция объединения двух подсхем с управляющими связями. Необходимость такой модификации схемы перед ее анализом была отмечена в пункте 1.2.2.

В строках 2–10 табл. 2.1.3 сгруппированы операции предварительных упрощений частных вариантов схем перед нахождением ССФ путем удаления или стягивания одного из двух двухполюсников (однополюсников). Это возможно, во-первых, при отсутствии управляющих связей между ними. Во-вторых, двухполюсник (однополюсник) оставляемый в схеме (см. строки 2–4, 6–8, 10) после ее преобразования, должен содержать приемники искомого тока или напряжения. В строках 4–6, 8–10 оставляемый двухполюсник должен иметь в своем составе независимый источник энергии. Удаляемый (стягиваемый) в строках 3–10 двухполюсник не содержит как приемников с искомым током или напряжением, так и независимых источников энергии.

Рассмотрим подробнее некоторые из операций табл. 2.1.3.

В строке 2 иллюстрируется удаление подсхемы, имеющей один общий узел со схемой. В этом случае должны отсутствовать управляющие связи между подсхемами. Кроме того, в удаляемой подсхеме не должно быть приемников искомого тока и напряжения. Докажем эквивалентность схем в строке 2 (слева и справа) относительно искомых величин на примере ССФ коэффициента передачи напряжения. Для этого представим на рис. 2.3.1 исходную схему.

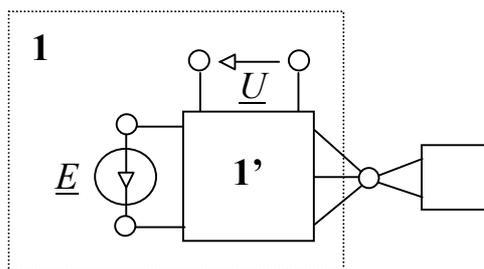


Рис. 2.3.1. Схема, разделяемая по одному узлу

Запишем для этой схемы схемно-алгебраическое выражение коэффициента передачи напряжения в соответствии со строкой 1 в табл. 2.1.1.

$$K_{EU} = \frac{\underline{U}}{\underline{E}} = \frac{\text{[Circuit diagram with voltage source E and block 1' connected to block 2, with voltage U across the output]}{\text{[Circuit diagram with block 1' connected to block 2, with shorted input terminals]}}. \quad (2.3.1)$$

Используем для упрощения (2.3.1) формулу определителя схемы, разделимой по одному узлу, из строки 1 в табл. 2.1.12. После удаления из числителя и знаменателя одинаковых сомножителей получаем

$$K_{EU} = \frac{\text{[Diagram 1]}}{\text{[Diagram 2]}} \quad (2.3.2)$$

Исходя из строки 1 табл. 2.1.1, схемно-алгебраической формуле (2.3.2) соответствует подсхема 1 на рис. 2.3.1. Это доказывает эквивалентность относительно искомых величин схемы на рис. 2.3.1 и подсхемы 1 на том же рисунке, а также подтверждает эквивалентность двух схем (слева и справа) в строке 2 табл. 2.1.3.

Докажем теперь правомерность удаления двухполюсника, параллельного независимому источнику напряжения (см. строку 3 табл. 2.1.3). Для этого найдем передаточную проводимость Y_{EI} от источника \underline{E} к приемнику \underline{I} на рис. 2.3.2.

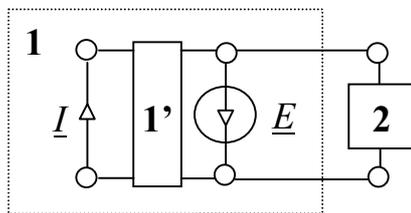


Рис. 2.3.2. Подсоединение двухполюсника к независимому источнику напряжения

Запишем схемно-алгебраическое выражение

$$Y_{EI} = \frac{\underline{I}}{\underline{E}} = \frac{\text{[Diagram 1]}}{\text{[Diagram 2]}} \quad (2.3.3)$$

Для упрощения числителя (2.3.3) используем операцию выделения двухполюсника, параллельного ГНУИ, из строки 4 табл. 2.1.12. Преобразование знаменателя проведем с помощью формулы для определителя схемы,

разделимой по одному узлу (см. строку 1 табл. 2.1.12). Удалим одинаковые множители из числителя и знаменателя. В результате получаем

$$Y_{EI} = \frac{\underline{I}}{\underline{E}} = \frac{\text{схема 1}}{\text{схема 2}}. \quad (2.3.4)$$

Схемно-алгебраическому выражению (2.3.4) соответствует подсхема 1 на рис. 2.3.2., что доказывает эквивалентность двух схем (слева и справа) в строке 3 табл. 2.1.3.

Докажем возможность удаления двухполюсника, параллельного управляемому источнику ЭДС, в схеме из строки 4 (слева) табл. 2.1.3. Без потери общности будем считать, что управляющей величиной является напряжение. Тогда схему из строки 4 (слева) табл. 2.1.3 можно представить более детально, как показано на рис. 2.3.3, где K – параметр ИНУН.

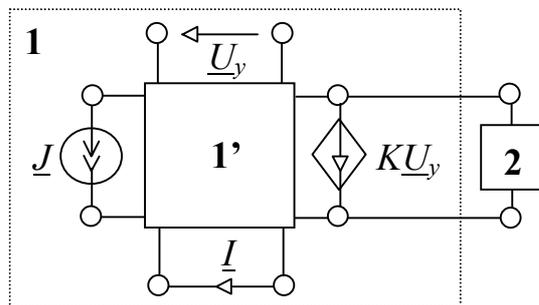


Рис. 2.3.3. Подсоединение двухполюсника к управляемому источнику напряжения

Запишем схемно-алгебраическое выражение коэффициента передачи тока

$$K_{JI} = \frac{\underline{I}}{\underline{J}} = \frac{\text{схема 1}}{\text{схема 2}}. \quad (2.3.5)$$

Выделим в числителе и знаменателе (2.3.5) двухполюсник 2, параллельный ИНУН, так, как показано в строке 4* табл. 2.1.3. В результате получаем

$$K_{JI} = \frac{\underline{I}}{\underline{J}} = \frac{\left| \begin{array}{c} \text{Circuit 1'} \\ \text{Circuit 2} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} \text{Circuit 1'} \\ \text{Circuit 2} \end{array} \right|}} \quad (2.3.6)$$

Следует отметить, что использованное выделение двухполюсника (см. выражение в строке 4* табл. 2.1.3) доказывается на основе формулы для определителя схемы, разделимой по двум узлам (см. строку 2 табл. 2.1.12). При этом схема в первом сомножителе второго слагаемого оказывается вырожденной вследствие короткого замыкания источника ЭДС. Определитель такой схемы равен нулю (см. табл. 2.1.5). Следовательно, остается только одно слагаемое, приведенное в строке 4* табл. 2.1.3.

После сокращения общего множителя в числителе и знаменателе выражения (2.3.6) получаем

$$K_{JI} = \frac{\underline{I}}{\underline{J}} = \frac{\left| \begin{array}{c} \text{Circuit 1'} \\ \text{Circuit 2} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} \text{Circuit 1'} \\ \text{Circuit 2} \end{array} \right|}} \quad (2.3.7)$$

Схемно-алгебраическая формула (2.3.7) соответствует двухполюснику 1 на рис. 2.3.3. Это доказывает правомерность удаления двухполюсника 2 и эквивалентность двух схем в строке 4 (слева и справа) из табл. 2.1.3.

Доказательство остальных операций (строки 5–10 из табл. 2.1.3) выполняется аналогично.

2.4. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ПРОСТЕЙШИХ СХЕМ

В табл. 2.1.4 приведены определители простейших схем. Определитель схемы – одиночного узла, помещенный в строку 1, равен единице, поскольку эта схема может быть получена из u -петли (см. строку 5 в табл. 2.1.4) при $u=0$. С другой стороны, одиночный (изолированный) узел эквивалентен разомкнутой z -ветви (см. строку 2 в табл. 2.1.4) при $z=0$, определитель которой также равен единице. В качестве упражнения сравните приведенное выше доказательство с доказательством из работы [18].

Определители схем в строках 2–9 находятся с помощью законов Ома, Кирхгофа, а также формул (1.3.1) и (1.3.2). В качестве примера получим определитель разомкнутой Z -ветви в строке 2. Последовательно с этой ветвью включим источник ЭДС \underline{E} . В результате получим разомкнутую ZE -ветвь, определитель которой равен определителю исходной z -ветви. К зажимам ZE -ветви подсоединим приемник напряжения \underline{U} . Поскольку его сопротивление равно бесконечности, он не влияет на ток \underline{I} и распределение напряжений в схеме, то есть не изменяет определитель схемы. Составим для образованного контура уравнение по второму закону Кирхгофа $Z\underline{I} + \underline{U} = \underline{E}$. Поскольку схема разомкнута, то $\underline{I} = 0$, а напряжение $\underline{U} = \underline{E}/1$. Следовательно, $\Delta = 1$. Другое доказательство этого положения приведено в пункте 1.3.1.

Определитель НУИ-контура (см. строку 10 табл. 2.1.4) равен единице. Это вытекает из того, что такой контур эквивалентен короткозамкнутой ветви (изолированному узлу) или контуру-нуллору, сопротивление которого равно нулю. Строгое доказательство можно выполнить на основе метода полных деревьев (метода графа тока-напряжения Коутса) [10]. При этом учитывается, что НУИ-контур является простейшим полным деревом с параметром, равным единице [10].

2.5. НЕЙТРАЛИЗАЦИЯ ЭЛЕМЕНТОВ И ВЫРОЖДЕНИЕ СХЕМ

В табл. 2.1.5 отражены условия нейтрализации элементов и вырождения схем при замыкании и размыкании ветвей. Каждая из этих операций приводит к тому, что ветвь оказывается связанной со схемой одним узлом, и, следовательно, определитель такой схемы может быть найден в соответствии со строкой 1 табл. 2.1.12 [3] как произведение определителей двух подсхем. Таким образом, если определитель подсхемы ветви равен единице, то ветвь нейтрализуется удалением или стягиванием. Например, в случае u -петли (см. строку 5 табл. 2.1.4) выполняется ее удаление, в случаях разомкнутой z -ветви (см. строку 2 табл. 2.1.4) и разомкнутого приемника тока проводится их стягивание. В случае равенства определителя подсхемы-ветви параметру соответствующего элемента для разомкнутой u -ветви и z -петли этот параметр выделяется, то есть записывается как множитель перед определителем подсхемы, а сама ветвь стягивается и удаляется соответственно (см. строки 3 и 4 табл. 2.1.4). Если определитель подсхемы-ветви равен нулю, например, в

случае петли приемника тока или разомкнутого приемника напряжения, то схема является вырожденной (см. строки 4 и 5 табл. 2.1.7).

Обоснование вырожденности схем, содержащих замкнутый генератор ЭДС и разомкнутый источник тока, основано на возникновении в этом случае бесконечно большого тока и напряжения соответственно.

Обратим внимание на операции замыкания и размыкания генератора и приемника НУИ. Если в схеме замкнут (разомкнут) генератор НУИ, то формируемая для этой схемы по законам Кирхгофа система уравнений является недоопределенной – число уравнений меньше числа неизвестных. Это связано с тем, что генератор НУИ не имеет компонентного уравнения, то есть его ток и напряжение могут принимать любые (неизвестные) значения, которые определяются всей схемой [15]. В рассматриваемом случае оказывается неопределенным ток (напряжение) генератора НУИ, если последний замкнут (разомкнут).

Если в схеме замкнут или разомкнут приемник НУИ, то ее система уравнений также является недоопределенной. Неопределенным оказывается напряжение или ток генератора НУИ, потому что известные (нулевые) ток и напряжение приемника НУИ в формируемой системе уравнений не используются.

В табл. 2.1.6 приведены правила упрощения схем и в целом задачи разложения схемных определителей при параллельном и последовательном соединении элементов. Так, при параллельном соединении проводимости Y и генератора напряжения выполняется удаление Y . Действительно, выделение Y по формуле (1.3.2) требует учета двух слагаемых. В первом слагаемом закорачивается генератор напряжения, что ведет к вырождению схемы (см. табл. 2.1.5), а во втором слагаемом Y удаляется из схемы. Все остальные правила выводятся из табл. 2.1.6 аналогично.

Табл. 2.1.7 содержит условия вырождения схем. Доказательство приведенных условий проводится на основе формул (1.3.1), (1.3.2), (1.6.1) и уравнений по законам Кирхгофа. В качестве примера остановимся на строке 1 табл. 2.1.7. Схемы, состоящие из двух и более несвязных подсхем, имеют нулевой определитель. Для доказательства возьмем два несвязных между собой узла, пронумеруем их по порядку 1 и 2. К узлу с номером 2 подсоединим одним из полюсов независимый источник ЭДС E . Свободный узел источника обозначим номером 3. Определитель полученной схемы остался таким же, как у исходной схемы. Подключим между первым и вторым узлами приемник напряжения U_{12} , а между первым и третьим узлами приемник U_{13} . Для полученной схемы по законам Кирхгофа можно сформулировать только одно уравнение $U_{13} - U_{12} = E$. Искомые напряжения U_{12} , U_{13} найти нельзя, поскольку уравнение недоопределено. Таким образом, схема, состоящая из двух и более несвязных подсхем, является вырожденной.

2.6. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ СХЕМ С НУИ

В табл. 2.1.8 сгруппированы способы преобразования определителей схем с НУИ. Для доказательства правил замещения последовательных (см. строки 1 и 2) и параллельных (см. строки 3 и 4) соединений одноименных генераторов и приемников НУИ используются аналогичные преобразования с нуллорами [7], а также правило изменения знака определителя матрицы при изменении знака элементов одного столбца. Правила взаимной замены номеров у генераторов или приемников НУИ (см. строки 5 и 6 табл. 2.1.8) основаны на правиле изменения знака определителя матрицы при взаимном перемещении строк или столбцов.

Правила выделения НУИ, генератор и приемник которого расположены в сечении (см. строки 7 и 8 табл. 2.1.8), основаны на переносе генератора НУИ через сечение. Последняя операция не изменяет определителя схемы, поскольку в этом случае уравнения по законам Кирхгофа остаются прежними.

Доказательство правил выделения НУИ, одна ветвь которого (генератор или приемник) расположена в рассматриваемом сечении, проводится с учетом предварительной замены номеров у генераторов или у приемников НУИ (см. строки 5 и 6 табл. 2.1.8).

Наиболее общая топологическая формула для выделения параметра НУИ с номером n имеет вид

$$\Delta = \pm \Delta_n, \quad (2.6.1)$$

где Δ_n - определитель схемы, полученной из первоначальной схемы, в результате следующих преобразований: 1) стягивание генератора (приемника) выделяемого НУИ таким образом, чтобы генераторы (приемники), которые инцидентны одному из узлов - опорному узлу этого генератора (приемника), переключились на другой его узел; 2) объединение опорных узлов выделяемого НУИ. Положительный (отрицательный) знак перед Δ_n выбирается в случае противоположной (одинаковой) ориентации генератора и приемника НУИ в первоначальной схеме по отношению к его опорным узлам.

Преобразования 1 и 2, выполняемые относительно выделяемого НУИ, называются его стягиванием (см. формулу (1.9.3)). Опорные узлы, относительно которых выполняется стягивание НУИ, выбираются произвольно, но с одним условием. - с опорными узлами должны быть соединены исключительно генераторы и приемники НУИ. При наличии у генератора и приемника общего узла целесообразно использовать его в качестве опорного узла и генератора, и приемника. Для этого случая преобразование 2 в операции стягивания опускается, а данное выше правило выбора знака инвертируется, то есть знак перед Δ_n считается положительным (отрицательным) при одинаковой (противоположной) ориентации генератора и приемника соответствующего НУИ по отношению к общему опорному узлу в первоначальной схеме.

2.7. ФОРМУЛЫ ВЫДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ БАЗОВЫХ ЭЛЕМЕНТОВ И СЛЕДСТВИЯ ЭТИХ ФОРМУЛ

В табл. 2.1.9 отражены в схемно-алгебраическом виде базовые формулы (1.3.1), (1.3.2) и (1.6.1) [3, 4, 10, 11].

Обобщением формулы (1.3.2), схемно-алгебраическое выражение которой представлено в строке 2 табл. 2.1.9, является формула (1.9.3), которая использует операцию стягивания для УИ, подобную аналогичной операции для u -ветви [11]. Эта формула в отличие от формулы (1.6.1) не приводит к образованию нового НУИ взамен УИ в первой производной схеме, то есть

$$\Delta = \pm \chi \Delta_{\chi} + \Delta(\chi=0), \quad (2.7.1)$$

где Δ_{χ} - определитель схемы, полученной из первоначальной схемы в результате стягивания выделяемого УИ. Формула (2.7.1) позволяет минимизировать число операций вычитания в формируемых выражениях ССФ.

Если опорным узлам инцидентны u -ветви, то для выполнения стягивания УИ они должны быть замещены вырожденными ИТУН. Поскольку нейтрализация генераторов напряжения и приемников тока приводит к объединению узлов схемы, не допускается инцидентность соответствующих ветвей других УИ хотя бы одному из опорных узлов выделяемого УИ. Это ограничение всегда можно обойти надлежащим выбором опорных узлов, первоочередным выделением z -ветвей и УИ с генераторами напряжения и (или) приемниками тока, а также заменой в необходимых случаях операции стягивания операцией преобразования в НУИ (см. формулу (1.6.1)).

Табл. 2.1.10 содержит частные случаи выделения сопротивления, проводимости и управляемых источников, включенных параллельно или последовательно с генераторами и приемниками напряжения или тока, а также с генераторами и приемниками НУИ. Доказательство преобразований проводится с помощью (1.3.1), (1.3.2) и (1.6.1) при учете условий вырождения схем из табл. 2.1.7.

В табл. 2.1.11 отражены эквивалентные упрощения схем в результате нейтрализации элементов. Доказательство преобразований основано на формулах (1.3.1) и (1.3.2) с использованием условий вырождения из табл. 2.1.7.

Следствием стягивания или удаления пассивных ветвей может быть образование ИТУН, у которых генератор и приемник параллельны, или ИНУТ, у которых генератор и приемник соединены последовательно. Такие УИ замещаются квазипассивными двухполюсниками с параметрами проводимости или сопротивления согласно рис. 1.2.1. Квазипассивное преобразование в отличие от обычно используемого обратного преобразования упрощает схему [10].

Случаи вырождения активной схемы и ее упрощения, инвариантные к схемному определителю, в полной мере согласуются с физическими представлениями о пассивных элементах и источниках напряжения и тока. Важно, что упрощения и проверка вырожденности схемы выполняются путем выявления соответствующих особенностей ее структуры и состава элементов, что невозможно или затруднено при аналогичных проверках матрицы или графа этой схемы.

Для сокращения объема проводимых выкладок и формирования оптимальных по вычислительной сложности выражений ССФ необходимы правила выбора мультиветвей (параллельно соединенных u -ветвей) и других подсхем, параметры которых подлежат выделению в первую очередь [27]. В частности, для этого среди мультиветвей схемы, состоящей из двухполюсных элементов, выбирается та, которая имеет наибольший показатель участия. Чтобы избежать использования трудоемкой процедуры вычисления количества деревьев, предложено правило выбора таких мультиветвей.

Правило “минимума” [27]. В схеме рассматриваются узлы и сечения, которым инцидентно минимальное количество мультиветвей. Принимается, что наибольшим показателем участия обладает та из них, которая смежна наименьшему числу мультиветвей.

Правила показателей участия и кратности [27]. Первое правило заключается в первоочередном выделении мультиветвей, имеющих наибольшие показатели участия. Правило кратности требует, чтобы среди претендентов на выделение выделялась в первую очередь та мультиветвь, которая имеет наибольшую кратность, то есть количество образующих ее ветвей.

Правило половинного деления [27]. Наряду с правилами показателей участия и кратности необходимо учитывать третье правило, которое называется правилом половинного деления. Оно означает, что получение оптимального выражения достигается выделением по возможности более сложных подсхем и минимизацией разности между количествами ветвей в выбранных подсхемах.

Формирование z - и uz -выражений ССФ имеет свои особенности. Например, для лестничной схемы число узлов более чем в два раза превышает число независимых контуров. Поэтому в качестве параметров ветвей такой схемы целесообразно использовать сопротивления. Учитывая дуальность формул (1.3.1) и (1.3.2), для формирования оптимальных z - и uz -выражений схемных определителей вводится понятие макроветви, параметром которой является сумма сопротивлений образующих ее последовательно соединенных z -ветвей. Оптимальное z -выражение получается с учетом правил ПУ, кратности и половинного деления. В силу дуальности формул (1.3.1) и (1.3.2) правило “минимума”, используемое при выборе мультиветвей, модифицируется в правило “максимума” для выбора макроветвей, то есть среди макроветвей, инцидентных узлу или сечению с максимальным числом мультиветвей и макроветвей, выбирается та, которой смежно наибольшее их количество.

В случаях, когда количества независимых узлов и контуров схемы отличаются незначительно, смешанное представление параметров ветвей открывает возможности для получения уз-выражений ССФ, имеющих различную сложность и способных конкурировать по вычислительным свойствам с у- и z-выражениями. Для этого совместно используются формулы (1.3.1) – (1.3.4) и правила оптимального выделения параметров.

Задание параметров емкостей (индуктивностей) в виде емкостных проводимостей (индуктивных сопротивлений) позволяет избежать операций деления при получении ССФ в операторной форме. При надлежащем задании параметров ветвей всегда могут быть получены оптимальные безразмерные уз-выражения для передаточных ССФ. Такие выражения потенциально более устойчивы при численных расчетах. В этом случае также снижаются требования к диапазону представления чисел. Из правила показателей участия и формул (1.3.1), (1.3.2) следует, что уменьшение сложности схемного определителя достигается заданием проводимостями (сопротивлениями) ветвей с меньшими (большими) показателями участия.

2.8. ФОРМУЛЫ ДЕЛЕНИЯ СХЕМ НА ЧАСТИ

В табл. 2.1.12 сгруппированы формулы разложения определителей схем делением их на части. В строках 1 и 2 представлены общие формулы нахождения определителей схем, которые делятся по одному и двум узлам соответственно [3]. В строках 3 – 6 даны частные формулы выделения двухполюсника, соединенного параллельно и последовательно с генератором или приемником НУИ. Эти формулы выводятся с помощью более общей формулы из строки 2 табл. 2.1.12.

Значительный практический интерес представляет формула для нахождения числителя передаточной ССФ при каскадном соединении двух четырехполюсников [8], записанная в строке 7 табл. 2.1.12. Предложим здесь один из вариантов доказательства этой формулы. Введем фиктивную ветвь – последовательное соединение генератора и приемника НУИ под номером 2 (см. строку 3 табл. 2.1.8) и получим схемный определитель, который эквивалентен исходному и показан на рис. 2.8.1 в левой части схемного уравнения.

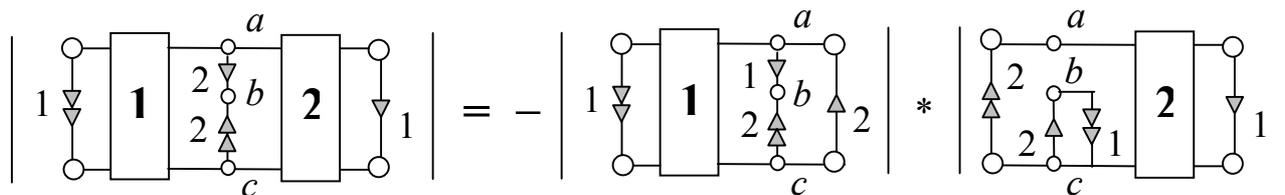


Рис. 2.8.1. К выводу формулы числителя для каскадного соединения четырехполюсников

После взаимной замены номеров у приемников НУИ согласно строки 6 табл. 2.1.8 разделим полученную выше схему на две подсхемы по трем узлам a , b , c и применим формулу из строки 3 табл. 2.1.12 [10]. Эта формула содержит 6 слагаемых, причем в рассматриваемом случае пять из них равны нулю. Оставшееся слагаемое представлено в правой части схемного уравнения на рис. 2.8.1.

После взаимной замены номеров у приемников НУИ в каждом сомножителе (см. строку 6 табл. 2.1.8), а также исключения последовательных соединений одноименных генераторов и приемников НУИ согласно строк 3 и 4 табл. 2.1.8 получим искомую формулу, представленную в строке 7 табл. 2.1.12.

Формулы нахождения числителя передаточной ССФ при параллельном и последовательном соединении двух трехполюсников представлены в строках 8 и 9 табл. 2.1.12. Доказательство этих формул выполняется аналогично выводу формулы из строки 7 табл. 2.1.12. Следует отметить, что формула для параллельного соединения трехполюсников (см. строку 8 табл. 2.1.12) публикуется впервые, а формула для последовательного соединения трехполюсников заимствована из работы [8].

Докажем формулу нахождения числителя передаточной схемной функции при параллельном соединении двух трехполюсников. Для этого схему в строке 9 (слева) табл. 2.1.12 разделим по трем узлам таким образом, чтобы в первую подсхему вошел только первый трехполюсник, а во вторую – второй трехполюсник и НУИ. Преобразуем схемно-алгебраическое выражение с помощью формулы в строке 3 табл. 2.1.12. Из шести слагаемых в этой формуле ненулевыми являются только два: второе и пятое. Остальные слагаемые равны нулю, поскольку в них один из сомножителей содержит замкнутый контур из ГНУИ (ПНУИ). В соответствии с табл. 2.1.5 такие схемы являются вырожденными и их определители равны нулю. Отсюда получаем схемное уравнение, которое представлено на рис. 2.8.2.

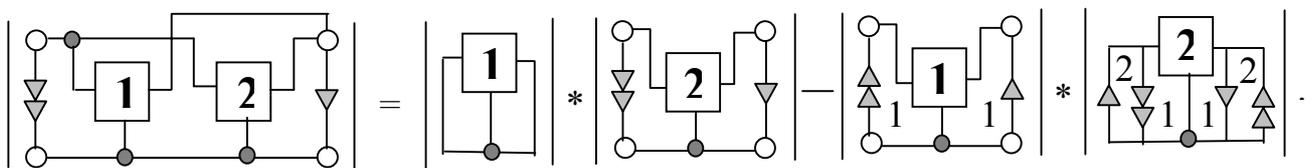


Рис. 2.8.2. К выводу формулы для определителя параллельного соединения трехполюсников

В первом сомножителе второго слагаемого на рис. 2.8.2. поменяем на противоположную ориентацию ГНУИ и ПНУИ. Это необходимо, чтобы привести сомножитель к виду, который представлен в строке 9 (справа) табл. 2.1.12. Во втором сомножителе проведем замену номеров ГНУИ в соответствии со строкой 5 табл. 2.1.8. Заменяем проводниками (строка 2 табл. 2.1.8) две пары встречного параллельного соединения одноименных ГНУИ и ПНУИ. В

результате получим схемно-алгебраическое выражение, которое помещено в строке 9 (справа) табл. 2.1.12.

Для доказательства формулы нахождения числителя передаточной схемной функции при последовательном соединении двух трехполюсников (см. строку 10 табл. 2.1.12) используем также выражение определителя схемы, разделенной по трем узлам, приведенное в строке 3 табл. 2.1.12. Будем считать, что в первую подсхему входит первый трехполюсник, а во вторую – второй трехполюсник и НУИ. Без потери общности будем считать, что нижнему узлу схемы в строке 3 (слева) табл. 2.1.12 соответствует общий узел двухполюсников в строке 10 (слева) табл. 2.1.12.

Преобразуем схемно-алгебраическое выражение в строке 10 (слева) табл. 2.1.12 с помощью формулы в строке 3 табл. 2.1.12. Из шести слагаемых в этой формуле ненулевыми являются только два – первое и шестое. Второе, третье и четвертое слагаемое равны нулю, поскольку в них один из сомножителей содержит разомкнутый ГНУИ или ПНУИ. В пятом слагаемом один из сомножителей имеет контур из ГНУИ (ПНУИ). В результате получаем

$$\left| \begin{array}{ccc} \circ & \boxed{1} & \circ \\ \downarrow & & \downarrow \\ \circ & & \circ \\ \uparrow & & \uparrow \\ \circ & \boxed{2} & \circ \end{array} \right| = \left| \begin{array}{cc} \circ & \boxed{1} \\ \circ & \circ \end{array} \right| * \left| \begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \circ & \boxed{2} & \circ \\ \uparrow & & \uparrow \end{array} \right| - \left| \begin{array}{ccc} \circ & \boxed{1} & \circ \\ \uparrow & & \uparrow \\ \circ & \boxed{2} & \circ \end{array} \right| * \left| \begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \circ & \boxed{2} & \circ \\ \uparrow & & \uparrow \end{array} \right|.$$

В первом сомножителе второго слагаемого изменим на противоположную ориентацию ГНУИ и ПНУИ, что не повлечет изменения знака. Во втором сомножителе этого же слагаемого перенумеруем ГНУИ согласно строке 5 из табл. 2.1.8. Исключим последовательное согласное соединение ГНУИ и ПНУИ в соответствии со строкой 4 табл. 2.1.8. После выполнения этих операций получим окончательное схемно-алгебраическое выражение, которое представлено в строке 10 (справа) табл. 2.1.12.

2.9. ФОРМУЛЫ ВЫДЕЛЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИНЦИПИАЛЬНЫХ СХЕМ

В табл. 2.1.13 сведены формулы выделения параметров трех- и четырехполюсных элементов, являющихся элементами принципиальных схем электронных устройств. В строках 1 – 3 табл. 2.1.13 рассмотрены схемы с взаимно связанными катушками. Так, в строке 1 приводится формула выделения только сопротивления взаимной индукции pM , в строке 2 – эта же формула для взаимной цепи, в строке 3 – формула выделения всех параметров двух взаимно связанных катушек, то есть сопротивлений pL_1 , pL_2 и pM . Доказательство этих формул осуществляется на основе правил выделения сопротивления (см. строку 1 табл. 2.1.9) и параметра ИНУТ (см. строку 3 табл. 2.1.9). Окончательные выражения получаются после группировки слагаемых.

В строке 4 табл. 2.1.13 дана формула выделения параметра идеального трансформатора. Эта формула получена путем последовательного применения формул выделения источника напряжения, управляемого напряжением (ИНУН), в соответствии со строкой 4 табл. 2.1.9 и источника тока, управляемого током (ИТУТ), согласно строке 6 табл. 2.1.9.

В строке 5 табл. 2.1.13 рассмотрена схемно-алгебраическая формула выделения операционного усилителя с конечными коэффициентом усиления K и выходным сопротивлением Z . Эта формула получена с помощью строк 1 и 4 табл. 2.1.9. Формулы для основных случаев включения идеального операционного усилителя представлены в строке 6 табл. 2.1.13.

Строка 7 табл. 2.1.13 содержит схемно-алгебраическую формулу выделения параметра k_Z конвертора сопротивления с преобразованием напряжения (КСПН). Здесь же дана схема замещения КСПН. Для доказательства выделим параметр ИНУН (см. строку 4 табл. 2.1.9) и умножим полученное выражение на коэффициент конверсии k_Z с целью исключения дробных выражений в числителе и знаменателе формируемых ССФ.

В строку 8 табл. 2.1.13 помещена формула выделения параметра k_Z конвертора сопротивления с преобразованием тока (КСПТ). Для вывода этой формулы воспользуемся представленной здесь же схемой замещения. После выделения параметра ИТУТ (см. строку 6 табл. 2.1.9) получаем искомую формулу.

В строке 9 табл. 2.1.13 находится схемно-алгебраическая формула выделения параметров идеального инвертора сопротивления. Коэффициент инверсии $k_{iZ}=1/(y_{12}y_{21})$. Вывод этой формулы выполняется путем выделения параметров источников тока, управляемых напряжением (ИТУН), y_{12} и y_{21} в соответствии со строкой 5 табл. 2.1.9.

Схемно-алгебраическая формула выделения параметра гиратора, приведенная в строке 10 табл. 2.1.13, получается, если принять $y_{12}=y_{21}=g$, где g – проводимость гирации.

В строке 11 табл. 2.1.13 представлена формула выделения H -параметров низкочастотного биполярного транзистора. Эта формула выводится путем выделения сопротивления h_{11} (см. строку 1 табл. 2.1.9), проводимости h_{22} (см. строку 2 табл. 2.1.9) и параметров управляемых источников h_{21} и h_{12} (см. строки 4 и 6 табл. 2.1.9). Искомая формула получается после группировки слагаемых.

Схемно-алгебраическая формула выделения Y -параметров транзисторов помещена в строку 12 табл. 2.1.13. Эта формула находится путем выделения проводимостей y_{11} и y_{22} (см. строку 2 табл. 2.1.9) и параметров ИТУН y_{12} и y_{21} (см. строку 5 табл. 2.1.9) с последующим группированием слагаемых.

В строке 13 табл. 2.1.13 рассмотрена формула выделения Z -параметров транзисторов. Эта формула получена на основе выделения сопротивлений z_{11} и z_{22} (см. строку 1 табл. 2.1.9) и параметров источников напряжения, управляемых током z_{12} и z_{21} (см. строку 3 табл. 2.1.9) с последующим группированием слагаемых.

До сих пор нами формировались САФ многополюсников с сосредоточенными параметрами. Рассмотрим теперь цепи, содержащие

длинные (передающие) линии [20]. Исходная схема, содержащая длинную линию (ДЛ), дана в строке 14 (слева) табл. 2.1.13. ДЛ характеризуется волновым сопротивлением Z_B , коэффициентом распространения γ и длиной l . Выделение указанных параметров будем проводить на основе матрицы [20]

$$A = \begin{pmatrix} ch(\tilde{\alpha}l) & Z_B sh(\tilde{\alpha}l) \\ \frac{sh(\tilde{\alpha}l)}{Z_B} & ch(\tilde{\alpha}l) \end{pmatrix}. \quad (2.9.1)$$

Для этого предложим схему замещения ДЛ относительно её внешних зажимов (см. строку 14 (слева) табл. 2.1.13). Эта схема содержит НУИ, ветви которого пронумерованы цифрой 1. Токи УИ

$$\underline{J}_1 = \frac{sh(\gamma l)}{Z_B} \cdot \underline{U}_2 \quad \text{и} \quad \underline{J}_2 = ch(\gamma l) \cdot \underline{I}_2,$$

ЭДС УИ

$$\underline{E}_1 = ch(\gamma l) \cdot \underline{U}_2 \quad \text{и} \quad \underline{E}_2 = Z_B sh(\gamma l) \cdot \underline{I}_2.$$

Убедиться в правильности этой схемы можно путём построения для неё матрицы a -параметров, которая совпадает с (2.9.1). Искомая САФ ДЛ получается путём многократного применения формулы (1.6.1) к определителю схемы замещения ДЛ, а также правил перенумерации генераторов и приёмников НУИ (ГНУИ и ПНУИ) и операций выделения последовательного и параллельного соединения одноимённых ГНУИ и ПНУИ [10]. Окончательная САФ ДЛ (см. строку 14 (справа) табл. 2.1.13) получена путём почленного умножения выражения на Z_B с целью исключения дробей в числителе и знаменателе ССФ.

Последовательное применение предлагаемых САФ многополюсников (см. табл. 2.1.13) и формул (1.3.1), (1.3.2) к схемным уравнениям ССФ позволяет получить искомую функцию в форме алгебраического выражения. Этот процесс можно ускорить, если использовать заранее вычисленные табличные определители часто встречающихся при решении задач элементарных схем многополюсников – схем, содержащих один многополюсник, полюсы которого в различных комбинациях замкнуты, разомкнуты или соединены между собой через сопротивление (проводимость), ГНУИ и ПНУИ. Определители элементарных схем многополюсников очень просты, быстро запоминаются и экономят время анализа цепи.

Применение схемно-алгебраических формул выделения параметров элементов принципиальных схем позволяет сократить объем выкладок при формировании ССФ за счет многократного использования готовых формул, а также получать более компактные выражения вследствие предварительной группировки слагаемых.

3. ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

Материалы практикума предназначены для развития у студентов навыков символьного анализа линейных электрических цепей различных классов. Практикум содержит варианты задач и примеры их решения по семи разделам теории цепей: электрические цепи при постоянном воздействии, цепи при гармоническом воздействии, частотные характеристики цепей, резонансы и колебательные контуры, цепи с взаимными индуктивностями, цепи с идеальными трансформаторами, электронные цепи. По каждой теме приводятся 24 индивидуальных вариантов заданий и 5 групповых, которые используются для проведения практических занятий и выполнения расчетно-графических работ.

Символьные схемные функции формируются в каждом разделе методом схемных определителей. Исследование полученных функций выполняется известными методами математического анализа [28].

3.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ ПОСТОЯННОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

В разделе рассматриваются цепи, содержащие резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности, источники постоянного напряжения и тока. Установившийся режим таких цепей называется статическим.

3.1.1. Постановка задачи

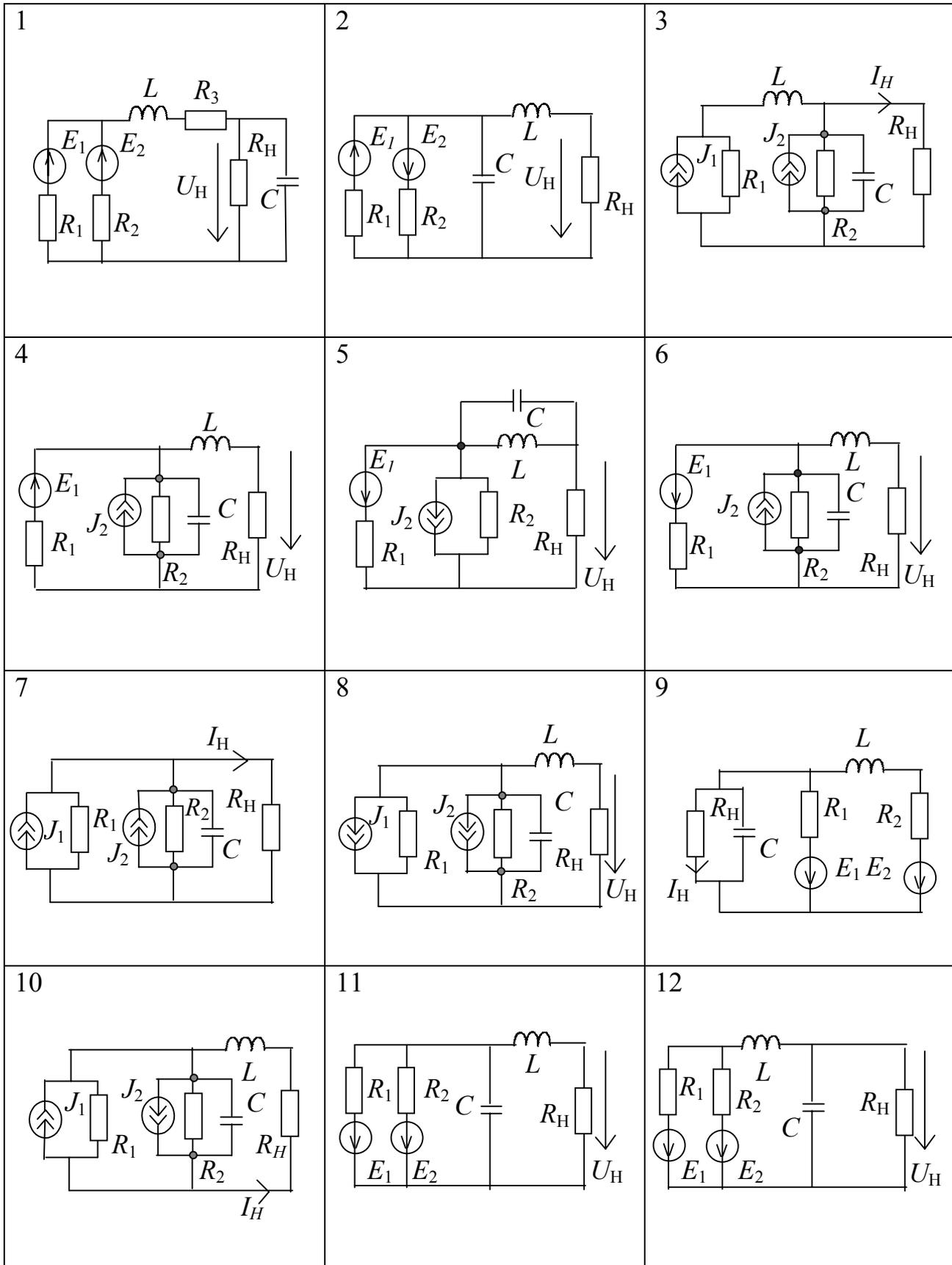
Дано:

- 1) схема электрической цепи в соответствии с индивидуальным вариантом (табл. 3.1.1), содержащая только идеальные элементы;
- 2) параметры элементов в соответствии с групповым вариантом (табл. 3.1.2).

Требуется:

- 1) построить резистивную схему замещения по постоянному воздействию;
- 2) сформировать в символьном виде функцию выходной величины U_H или I_H (указана на схеме);
- 3) найти численное значение U_H или I_H при заданных значениях параметров элементов;
- 4) получить символьные выражения U_H или I_H при $R_H = 0$ и $R_H \rightarrow \infty$, найти соответствующие численные значения;
- 5) записать символьную функцию мощности P_H на нагрузке R_H ;
- 6) исследовать функцию $P_H(R_H)$, найти символьные выражения для максимума мощности $P_{H\text{МАКС}}$ и соответствующего сопротивления $R_{H\text{МАКС}}$;
- 7) рассчитать численные значения $P_{H\text{МАКС}}$ и $R_{H\text{МАКС}}$ при заданных параметрах элементов.

Таблица 3.1.1. Схемы цепей при постоянном воздействии



Окончание табл. 3.1.1

<p>13</p>	<p>14</p>	<p>15</p>
<p>16</p>	<p>17</p>	<p>18</p>
<p>19</p>	<p>20</p>	<p>21</p>
<p>22</p>	<p>23</p>	<p>24</p>

Таблица 3.1.2. Численные значения параметров элементов
(групповые варианты)

Параметры Варианты	R_1 , Ом	R_2 , Ом	R_H , Ом	J_1 , А	J_2 , А	E_1 , В	E_2 , В
1	100	150	800	0,01	0,02	10	15
2	200	100	900	0,02	0,03	20	25
3	300	120	950	0,03	0,04	30	35
4	400	170	1100	0,04	0,05	40	45
5	500	200	1200	0,05	0,06	50	55

3.1.2. Пример решения задачи

Построение резистивной схемы замещения исходной цепи производится с использованием известных схем замещения реактивных элементов. Идеальный конденсатор при постоянном воздействии в установившемся режиме представляется разомкнутой ветвью, а идеальная катушка индуктивности – идеальным проводником. Источники постоянного напряжения и тока, резисторы переносятся в схему замещения без изменения. На рис. 3.1.1 а представлена исходная схема электрической цепи при постоянном воздействии, на рис. 3.1.1 б дана схема замещения этой цепи.

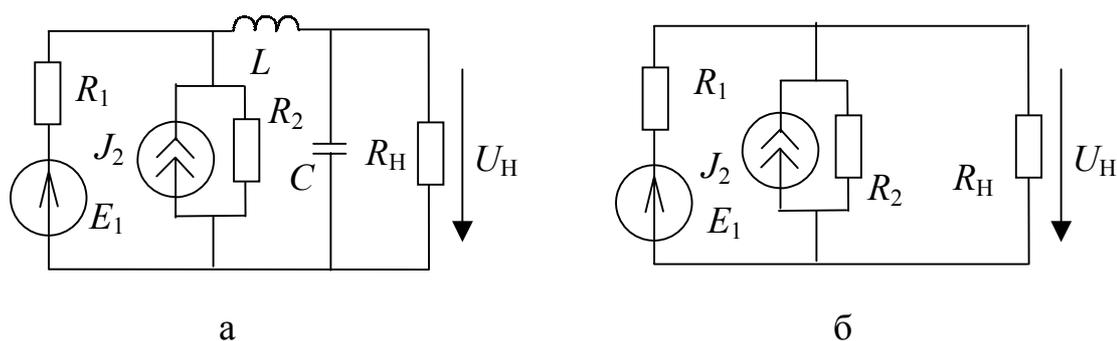


Рис. 3.1.1. Переход от исходной цепи при постоянном воздействии к резистивной схеме замещения

Формирование символьной функции выходной величины U_H или I_H рекомендуется осуществлять методом схемных определителей, теоретические

основы которого рассмотрены в разделах 1 и 2 настоящего пособия. Искомая функция в этом случае находится с помощью принципа суперпозиции

$$U_H = K_{E1RH} \cdot E_1 + R_{J2RH} \cdot J_2, \quad (3.1.1)$$

где K_{E1RH} – коэффициент передачи напряжения от источника E_1 к нагрузке R_H ; R_{J2RH} – передаточное сопротивление от источника J_2 к нагрузке R_H . Коэффициент передачи напряжения получается по формуле

$$K_{E1RH} = \Delta N / \Delta D.$$

Схемно-алгебраические операции по нахождению числителя ΔN и знаменателя ΔD сведены в табл. 3.1.3 и 3.1.4 соответственно.

Таблица 3.1.3. Формирование числителя функции K_{E1RH} для схемы рис. 3.1.1 б

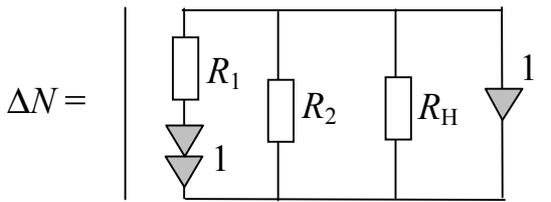
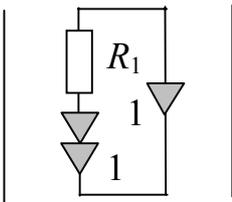
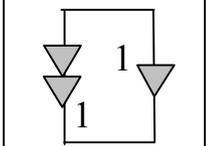
№	Наименование операций и схемно-алгебраические выражения (САВ)
1	Построение исходного САВ числителя (см. строку 1 табл. 2.1.1). $\Delta N =$ 
2	Выделение сопротивлений, параллельных приемнику НУИ, согласно строке 4 табл. 2.1.10. $\Delta N = R_H R_2 *$ 
3	Стягивание (удаление-замыкание) сопротивления, соединенного последовательно с генератором НУИ (см. строку 6 табл. 2.1.11). $\Delta N = R_H R_2 *$ 
4	Использование известного значения определителя контура, состоящего из генератора и приемника одноименного НУИ (см. табл. 2.1.4). Получение окончательного алгебраического выражения числителя. $\Delta N = R_H R_2 .$

Таблица 3.1.4.
Формирование знаменателя функции K_{E1RH} для схемы на рис. 3.1.1 б

№	Наименование операций схемно-алгебраические выражения (САВ)
1	Построение исходного САВ знаменателя (см. строку 1 табл. 2.1.1) $\Delta D = \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ R_1 \\ \\ \text{---} \\ \\ R_2 \\ \\ \text{---} \\ \\ R_H \\ \\ \text{---} \end{array} \right $
2	Выделение сопротивления (см. строку 1 табл. 2.1.9) $\Delta D = R_H * \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ R_1 \\ \\ \text{---} \\ \\ R_2 \\ \\ \text{---} \end{array} \right + \left \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ R_1 \\ \\ \text{---} \\ \\ R_2 \\ \\ \text{---} \end{array} \right $
3	Запись окончательного алгебраического выражения знаменателя после нахождения определителя схемы-контура из сопротивлений (см. строку 6 табл. 2.1.4) и определителя схемы, разделимой по одному узлу (см. строку 1 табл. 2.1.12). $\Delta D = R_H(R_1 + R_2) + R_1 R_2.$

Следует отметить, что при формировании выражений ΔN и ΔD в первую очередь выделяется сопротивление R_H . Это позволяет построить алгебраические выражения в наиболее удобном виде для последующего исследования функции (3.1.1), аргументом которой является переменная R_H . В результате

$$K_{E1RH} = \frac{R_H R_2}{R_H(R_1 + R_2) + R_1 R_2}.$$

Аналогично найдем числитель передаточного сопротивления (знаменатели всех схемных функций одинаковы). Отсюда

$$R_{J2RH} = \frac{R_H R_2 R_1}{R_H(R_1 + R_2) + R_1 R_2}.$$

Таким образом, искомая функция

$$U_H = \frac{R_H(R_2 E_1 + R_1 R_2 J_2)}{R_H(R_1 + R_2) + R_1 R_2}. \quad (3.1.2)$$

При $R_1=100$ Ом; $R_2=200$ Ом; $E_1=10$ В; $J_2=0,01$ А и $R_H=300$ Ом численное значение $U_H=6,0$ В.

Символьные функции напряжения на нагрузке при $R_H=0$ и $R_H \rightarrow \infty$ имеют вид:

$$U_H^0 = 0 \text{ и } U_H^\infty = \frac{R_2 E_1 + R_1 R_2 J_2}{R_1 + R_2} \text{ соответственно.}$$

Последние выражения могут быть получены двумя способами: во-первых, из (3.1.2) как предельные математические формулы и, во-вторых, путем символьного анализа модифицированных электрических схем на рис. 3.1.1 б. Модификация производится замыканием ($R_H=0$) и размыканием ($R_H \rightarrow \infty$) ветви R_H . Численное значение $U_H^\infty=7,3(3)$ В.

Находим символьную функцию мощности на нагрузке. Для этого преобразуем предварительно функцию напряжения (3.1.2) к виду

$$U_H(R_H) = \frac{a \cdot R_H}{b \cdot R_H + c}, \quad (3.1.3)$$

где $a=R_1 E_1 + R_1 R_2 J_2$; $b=R_1 + R_2$; $c=R_1 R_2$ - постоянные коэффициенты.

В результате функция мощности

$$P_H(R_H) = \frac{U_H^2}{R_H} = \frac{a^2 \cdot R_H}{(b \cdot R_H + c)^2}. \quad (3.1.4)$$

Исследуем функцию (3.1.4) на максимум. Данная функция принимает максимальное значение

$$P_{H\text{МАКС}} = \frac{a^2}{4b \cdot c} = \frac{(R_1 E_1 + R_1 R_2 J_2)^2}{4R_1 R_2 (R_1 + R_2)} \quad (3.1.5)$$

при сопротивлении нагрузки

$$R_{H\text{МАКС}} = \frac{c}{b} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}. \quad (3.1.6)$$

Последняя формула соответствует известному условию согласования нагрузки и генератора [20]. При этом ЭДС эквивалентного генератора $E_I = U_H^\infty$, а сопротивление $R_I = R_{H\text{МАКС}}$. После подстановки численных значений параметров элементов получим: $P_{H\text{МАКС}}=0,06$ Вт; $R_{H\text{МАКС}}=66,667$ Ом.

Следует обратить внимание на то, что напряжение на конденсаторе в цепи постоянного напряжения равно напряжению между соответствующими точками разрыва на резистивной схеме замещения. Ток катушки индуктивности равен току соответствующего короткозамкнутого проводника на той же схеме замещения. Ток конденсатора и напряжение на катушке индуктивности равны нулю.

3.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

В разделе рассматриваются задачи расчета режима линейных электрических цепей при гармоническом воздействии. Для практического освоения символьного алгоритма предлагается выполнить анализ RC - или RL -цепи, содержащей независимые источники напряжения или тока. Решение задачи выполнить методом комплексных амплитуд [20], который включает три этапа. Первый этап состоит в переходе от исходной схемы к комплексной схеме замещения. На втором этапе проводится расчет искомых токов и напряжений в виде комплексных действующих или амплитудных значений. На этом этапе рекомендуется использовать схемный подход к формированию необходимых для выполнения задания ССФ. Наконец, третий этап подразумевает переход от комплексных значений к гармоническим функциям времени для искомых токов и напряжений.

3.2.1. Постановка задачи

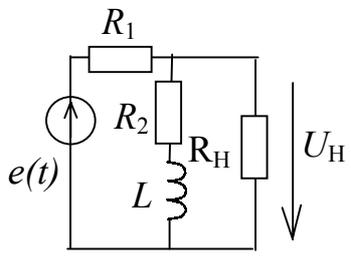
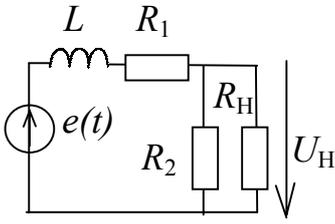
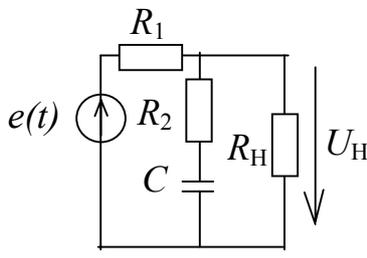
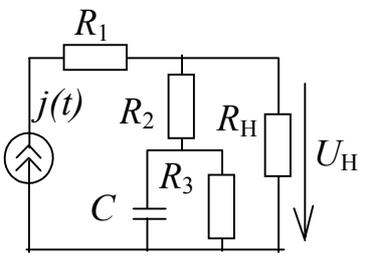
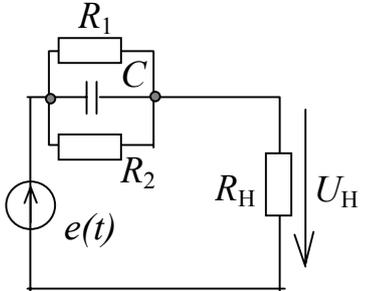
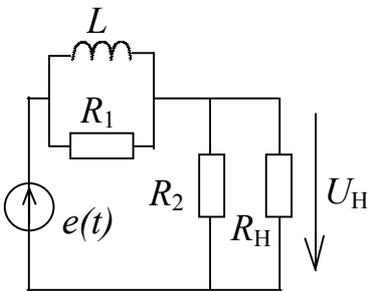
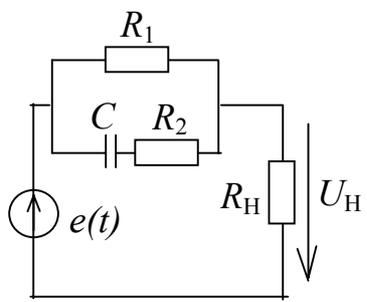
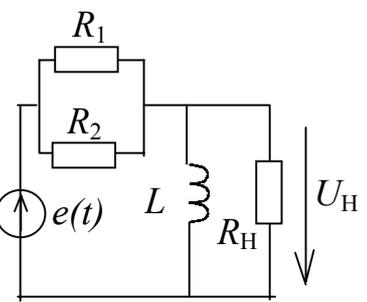
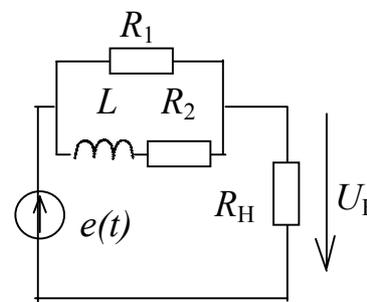
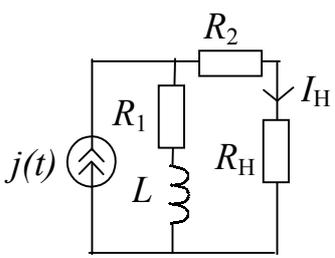
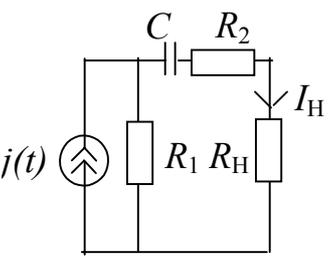
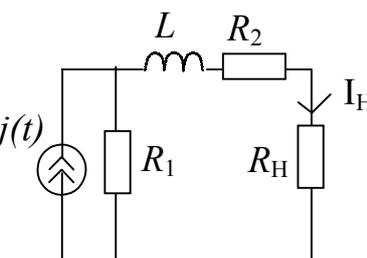
Дано:

- 1) схема электрической цепи в соответствии с индивидуальным вариантом (табл. 3.2.1);
- 2) численные значения параметров элементов в соответствии с групповым вариантом (табл. 3.2.2);
- 3) базисная функция для источников энергии – синус.

Требуется:

- 1) построить комплексную схему замещения цепи;
- 2) найти действующее значение выходной функции напряжения U_H или тока I_H (указана на схеме) в виде символьного выражения;
- 3) рассчитать численное значение U_H или I_H при заданных параметрах элементов;
- 4) найти символьное выражение для начальной фазы выходной функции φ_{UH} или φ_{IH} ;
- 5) рассчитать численное значение φ_{UH} или φ_{IH} при заданных параметрах элементов;
- 6) записать входную ($e(t)$ или $j(t)$) и выходную ($u_H(t)$ или $i_H(t)$) функции в символьной и численной гармонической форме;
- 7) построить на одном поле графики входной и выходной функций;
- 8) определить емкость C или индуктивность L (в зависимости от схемы), при которой амплитуда выходной функции в 2 раза меньше амплитуды входного воздействия;
- 9) исследовать условие существования решения.

Таблица 3.2.1. Схемы цепей при гармоническом воздействии

<p>1</p> 	<p>2</p> 	<p>3</p> 
<p>4</p> 	<p>5</p> 	<p>6</p> 
<p>7</p> 	<p>8</p> 	<p>9</p> 
<p>10</p> 	<p>11</p> 	<p>12</p> 

Окончание табл. 3.2.1

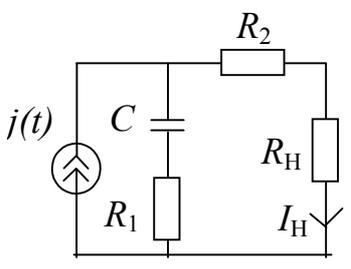
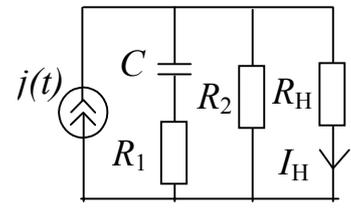
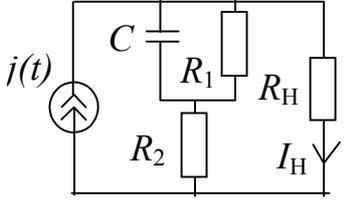
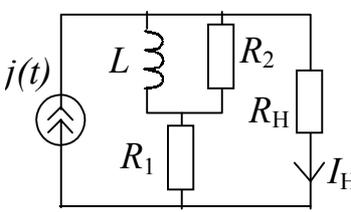
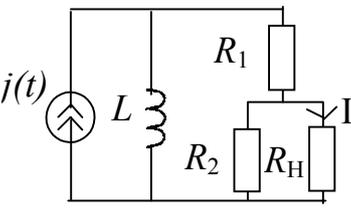
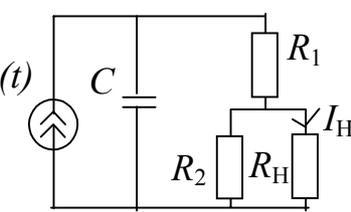
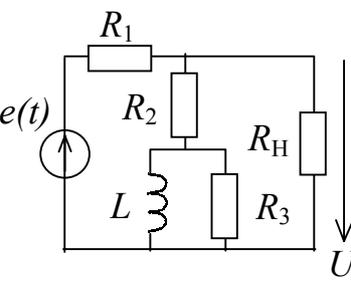
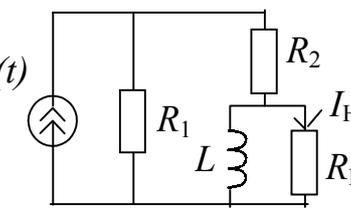
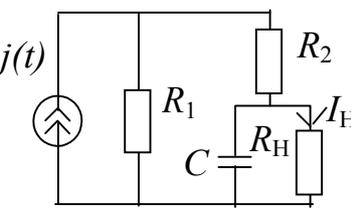
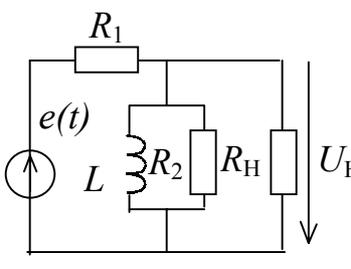
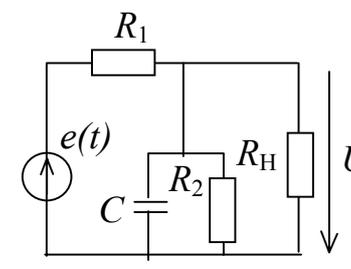
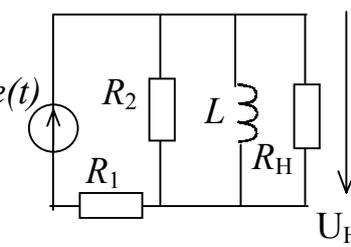
<p>13</p> 	<p>14</p> 	<p>15</p> 
<p>16</p> 	<p>17</p> 	<p>18</p> 
<p>19</p> 	<p>20</p> 	<p>21</p> 
<p>22</p> 	<p>23</p> 	<p>24</p> 

Таблица 3.2.2. Параметры элементов цепей при гармоническом воздействии (групповые варианты)

Вариант \ Параметр	1	2	3	4	5
$E, В$	10	20	30	40	50
$\varphi_e, \text{рад}$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$	$\pi/8$
$f, \text{кГц}$	1,0	1,2	1,5	2,0	2,5
$J, А$	0,05	0,1	0,15	2,0	2,5
$\varphi_J, \text{рад}$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/5$	$\pi/6$	$\pi/8$
$R_1, \text{Ом}$	50	60	70	80	90
$R_2, \text{Ом}$	60	70	80	90	100
$R_3, \text{Ом}$	75	80	90	110	120
$R_H, \text{Ом}$	150	200	220	180	200
$L, \text{мГн}$	10	12	15	18	20
$C, \text{мкФ}$	2,2	2,0	1,8	1,5	1,0

3.2.2. Пример решения задачи.

Для построения комплексной схемы замещения исходной цепи необходимо все элементы заменить на соответствующие комплексные схемы, найти комплексные действующие (или амплитудные) напряжения или ток источников и комплексные сопротивления (проводимости) пассивных элементов. Схема для примера представлена на рис. 3.2.1 а, соответствующая комплексная схема – на рис. 3.2.1 б.

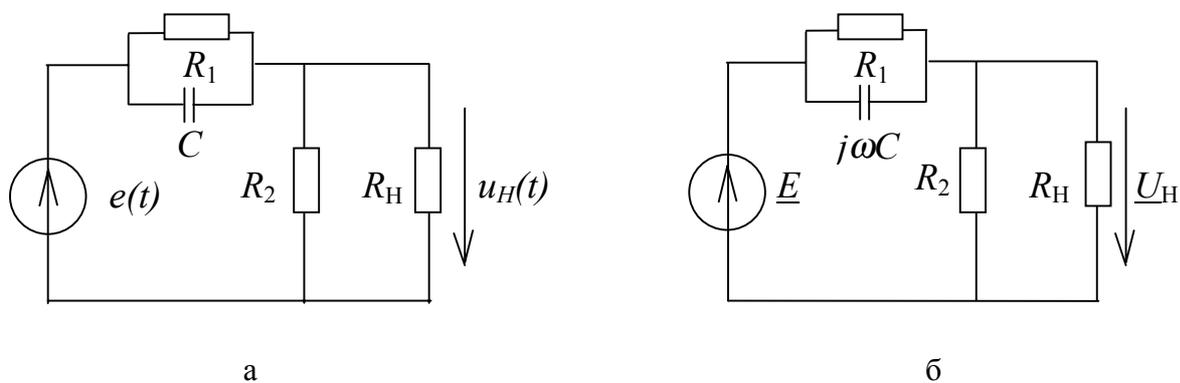


Рис. 3.2.1. Построение комплексной схемы замещения

Для определения действующего значения напряжения на нагрузке необходимо провести анализ комплексной схемы замещения (рис. 3.2.1 б) и найти комплексный коэффициент передачи напряжения

$$K_U = \frac{U_H}{E} = \frac{\Delta N}{\Delta D}. \quad (3.2.1)$$

Операции по формированию числителя ΔN и знаменателя ΔD (3.2.1) сведены в табл. 3.2.3 и 3.2.4 соответственно. В результате

$$\underline{K}_U = \frac{R_2 R_H + j\omega C R_2 R_1 R_H}{R_2 R_H + R_1 (R_2 + R_H) + j\omega C R_1 R_2 R_H}.$$

Действующее значение напряжения на нагрузке

$$U_H = K_U E = \sqrt{\frac{(R_2 R_H)^2 + (\omega C R_2 R_1 R_H)^2}{[R_2 R_H + R_1 (R_2 + R_H)]^2 + [\omega C R_1 R_2 R_H]^2}} \cdot E,$$

где K_U – модуль коэффициента передачи напряжения; E – действующее значение ЭДС источника.

Начальная фаза выходного напряжения

$$\varphi_{UH} = \varphi_{KU} + \varphi_E = \arctg(\omega C R_1) - \arctg\left(\frac{\omega C R_1 R_2 R_H}{R_2 R_H + R_1 (R_2 + R_H)}\right) + \varphi_E,$$

где φ_{KU} – аргумент комплексного коэффициента \underline{K}_U ; φ_E – начальная фаза ЭДС. Положим, что заданы численные значения параметров соответствующие варианту 1 в табл. 3.2.2. Тогда, $U_H=5,345$ В; $\varphi_{UH}=1,343$ рад. Мгновенные значения входной и выходной функции: $e(t)=E\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_e)=10\sqrt{2}\sin(2\pi\cdot 1000t+\pi/3)$; $u_H(t)=U_H\sqrt{2}\sin(\omega t+\varphi_{UH})=5,345\sqrt{2}\sin(2\pi\cdot 1000t+1,343)$. Графики $e(t)$ и $u_H(t)$ представлены на рис. 3.2.2. Кривые масштабированы в основных единицах системы СИ.

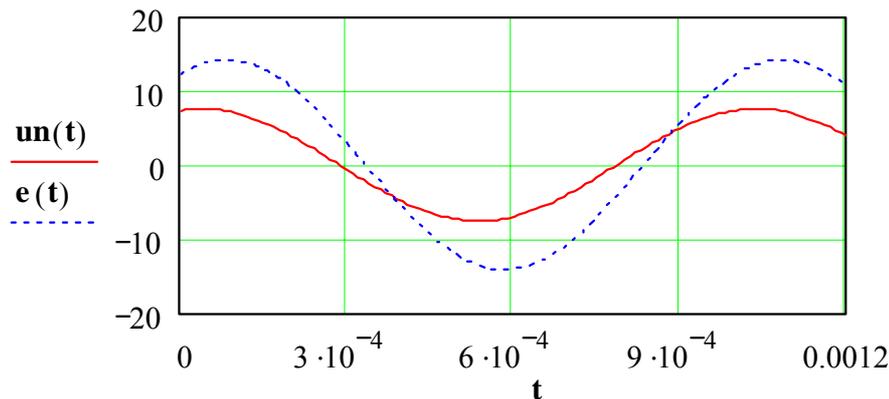


Рис. 3.2.2. Графики функций $e(t)$ и $u_H(t)$

Для определения величины ёмкости C , при которой амплитуда выходной функции $u_H(t)$ в 2 раза меньше амплитуды входной ЭДС $e(t)$, достаточно модуль коэффициента передачи напряжения K_U приравнять к 0,5 и решить полученное уравнение относительно C в символьном, а затем в численном виде. Запишем символьный результат

$$C = \frac{\sqrt{R_1^2 (R_2 + R_H)^2 + 2R_1 R_2 R_H (R_2 + R_H) - 3R_2^2 R_H^2}}{\sqrt{3\omega R_1 R_2 R_H}}. \quad (3.2.2)$$

Таблица 3.2.3. Формирование числителя функции \underline{K}_U для схемы на рис. 3.2.1 б

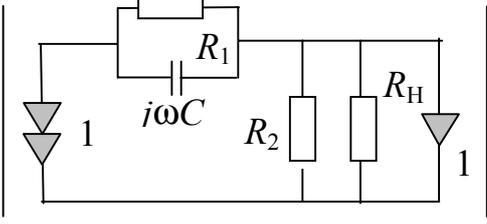
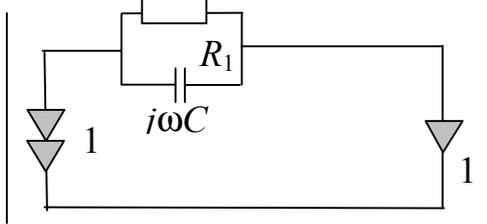
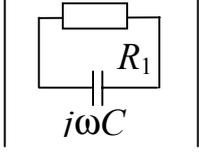
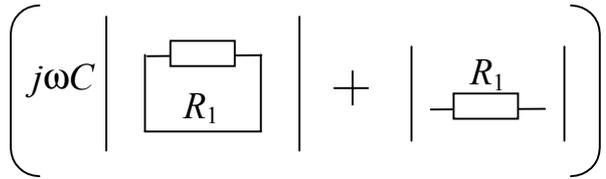
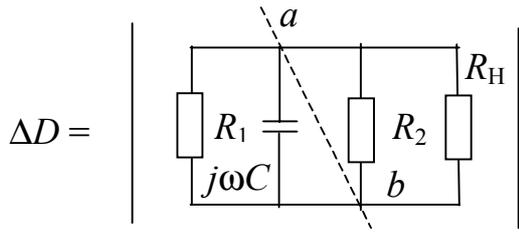
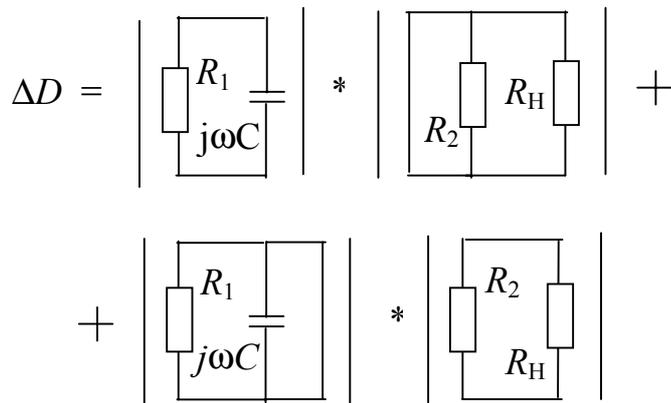
№	Наименование операций и схемно-алгебраические выражения (САВ)
1	Построение исходного САВ согласно строке 1 табл. 2.1.1.  $\Delta N = \left \begin{array}{c} \text{Circuit diagram} \end{array} \right $
2	Выделение сопротивлений R_2 и R_H , параллельных приемнику НУИ в соответствии со строкой 4 табл. 2.1.10.  $\Delta N = R_2 R_H \left \begin{array}{c} \text{Circuit diagram} \end{array} \right $
3	Удаление последовательного соединения генератора и приемника НУИ (встречное включение) разомкнутой ветвью  $\Delta N = R_2 R_H \left \begin{array}{c} \text{Circuit diagram} \end{array} \right $
4	Выделение комплексной проводимости согласно строки 2 табл. 2.1.9.  $\Delta N = R_2 R_H \left(j\omega C \left \begin{array}{c} \text{Circuit diagram} \end{array} \right + \left \begin{array}{c} \text{Circuit diagram} \end{array} \right \right)$
5	Запись окончательного выражения числителя с учетом определителей элементарных схем – замкнутой и разомкнутой z-ветвей (см. строки 2 и 4 табл. 2.1.4). $\Delta N = R_2 R_H (j\omega C R_1 + 1).$

Таблица 3.2.4.
Формирование знаменателя функции \underline{K}_U для схемы на рис. 3.2.1 б

№	Наименование операций и схемно-алгебраические выражения (САВ)
1	<p>Построение исходного САВ в соответствии со строкой 1 табл. 2.1.1.</p>  $\Delta D = \left \begin{array}{c} R_1 \\ j\omega C \\ R_2 \\ R_H \end{array} \right $
2	<p>Нахождение определителя схемы, делимой на части по двум узлам a и b, согласно строке 2 табл. 2.1.12.</p>  $\Delta D = \left \begin{array}{c} R_1 \\ j\omega C \end{array} \right * \left \begin{array}{c} R_2 \\ R_H \end{array} \right + \left \begin{array}{c} R_1 \\ j\omega C \end{array} \right * \left \begin{array}{c} R_2 \\ R_H \end{array} \right $
3	<p>Нахождение определителей схем, делимых на части по одному узлу, в соответствии со строкой 3 табл. 2.1.12. Запись определителей элементарных схем: z-, y- и zy-контуров согласно строк 4, 5, 6, 8 табл. 2.1.4.</p> $\Delta D = (j\omega C R_1 + 1) R_2 R_H + R_1 (R_2 + R_H)$

Численное значение $C = 1,531$ мкФ. Решение (3.2.2) существует при условии, что

$$R_1^2 (R_2 + R_H)^2 + 2 R_1 R_2 R_H (R_2 + R_H) \geq 3 R_2^2 R_H^2.$$

3.3. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПЕЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В разделе рассматривается задача анализа амплитудно- и фазочастотных характеристик (АЧХ и ФЧХ) линейных пассивных цепей, содержащих один независимый реактивный элемент – конденсатор или катушку индуктивности. Примером таких цепей являются простые фильтры, фазокорректирующие и апериодические звенья. Решение задачи состоит из трех основных этапов [20]. На первом этапе необходимо построить комплексную схему замещения. Второй этап предусматривает построение требуемой ССФ в комплексной форме. Этот этап выполняется методом схемных определителей. На третьем этапе находятся АЧХ и ФЧХ сформированной ССФ с помощью стандартных операций выделения модуля (это АЧХ) и аргумента (это ФЧХ) комплексной функции.

3.3.1. Постановка задачи

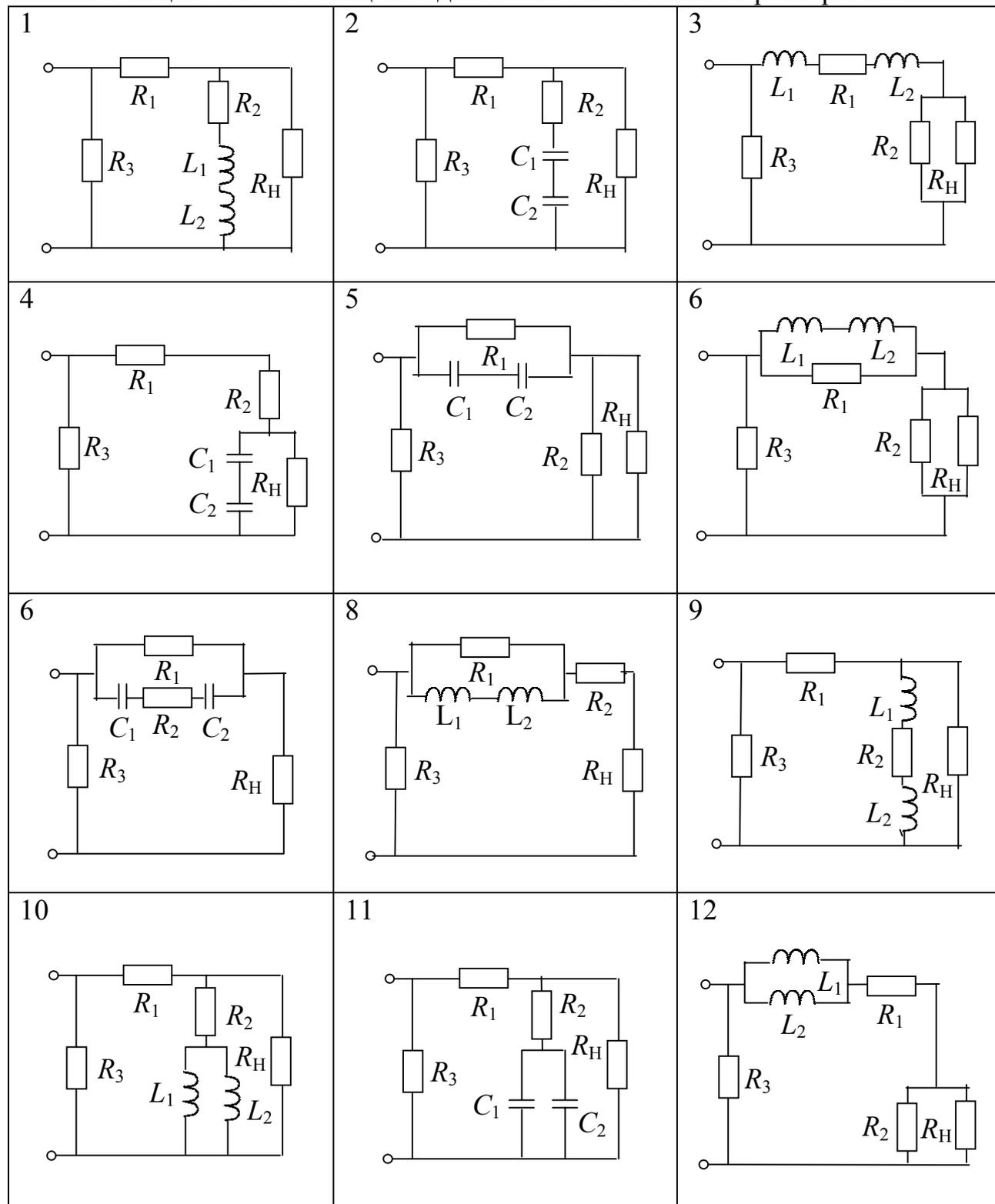
Дано:

- 1) схема цепи первого порядка в соответствии с индивидуальным вариантом (табл. 3.3.1);
- 2) на схеме цепи слева обозначены входные зажимы, а справа сопротивление нагрузки R_H ;
- 3) численные значения параметров элементов в соответствии с групповым вариантом (табл. 3.3.2);
- 4) во втором столбце табл. 3.3.2 указан тип искомой комплексной схемной функции (входное сопротивление или проводимость, коэффициенты передачи со входа к нагрузке напряжения или тока, передаточное сопротивление).

Требуется:

- 1) найти искомую схемную функцию в виде символьного комплексного выражения;
- 2) записать символьные формулы АЧХ и ФЧХ искомой схемной функции;
- 3) построить графики АЧХ и ФЧХ для заданных численных значений параметров;
- 4) найти аналитическое выражение для граничной частоты амплитудно-частотной характеристики заданной схемной функции, получить соответствующее численное значение;
- 5) найти сопротивление нагрузки, при котором граничная частота увеличивается вдвое по сравнению с частотой, найденной в предыдущем пункте настоящего задания.

Таблица 3.3.1. Схемы цепей для анализа частотных характеристик



Окончание табл. 3.3.1

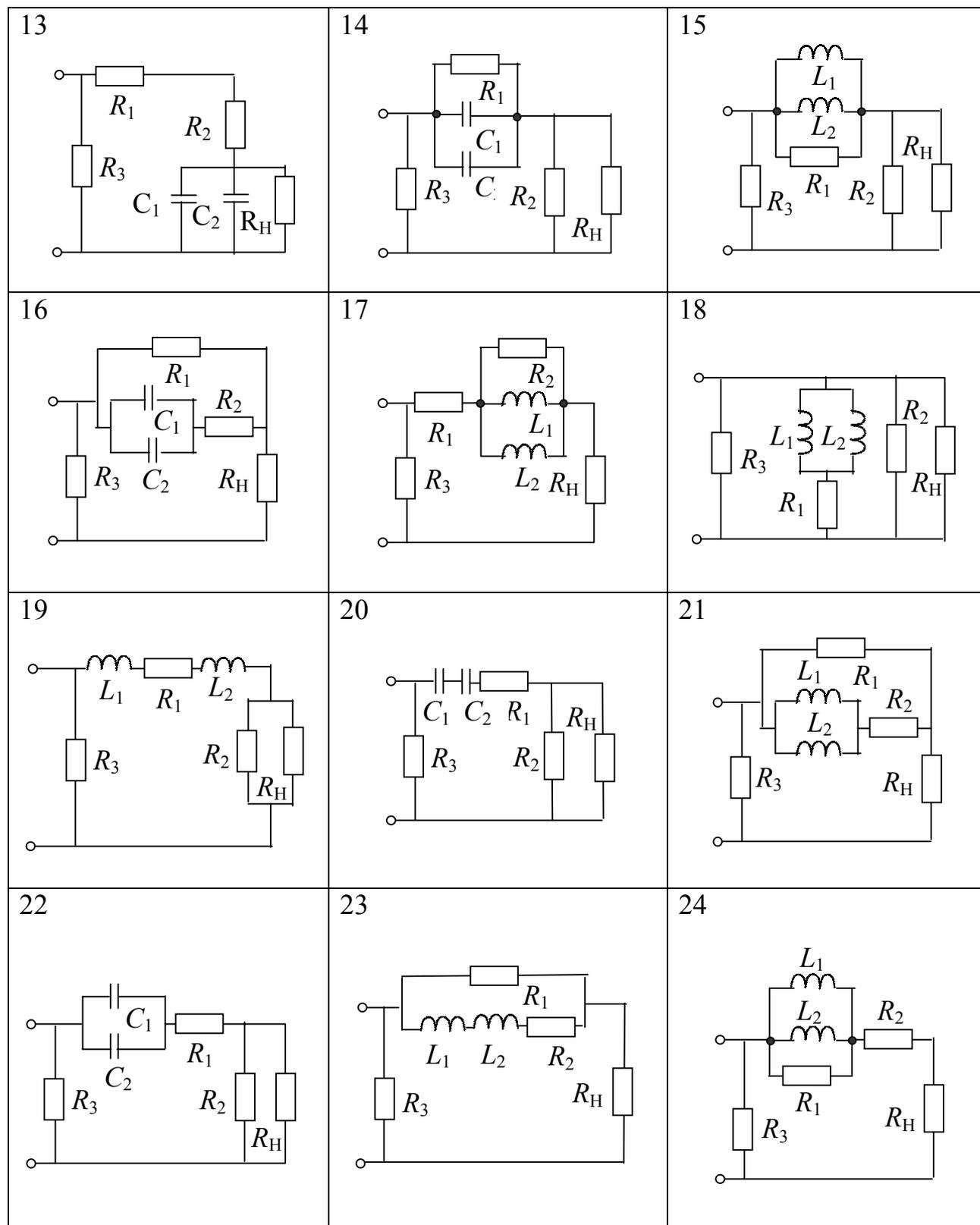


Таблица 3.3.2. Искомые комплексные частотные функции (КЧФ) и параметры элементов (групповые варианты)

Вариант	КЧФ	Параметры элементов							
		$R_1,$ кОм	$R_2,$ кОм	$R_3,$ кОм	$R_H,$ кОм	$L_1,$ мкГ	$L_2,$ мкГ	$C_1,$ мкФ	$C_2,$ МкФ
1	\underline{K}	1,0	1,5	1,0	5,0	2,5	4,0	0,1	0,2
2	$\underline{\beta}$	2,0	3,5	2,5	6,0	3,0	2,0	0,2	0,3
3	\underline{Z}_{BX}	3,0	4,0	3,0	8,0	4,0	1,0	0,3	0,4
4	\underline{Y}_{BX}	4,0	2,0	1,5	4,0	3,0	1,0	0,05	0,1
5	\underline{Z}_{12}	5,0	3,0	3,0	5,5	2,0	3,0	0,1	0,2

3.3.2. Пример решения задачи

Следует отметить, что некоторые схемы в табл. 3.3.1 содержат последовательные и параллельные соединения индуктивностей и емкостей соответственно. Прежде чем записывать САВ числителя и знаменателя для этих схем, необходимо преобразовать указанные соединения в соответствии со строками 1 и 2 табл. 2.1.2.

Рассмотрим построение комплексного коэффициента передачи тока со входа схемы на рис. 3.3.1 а к нагрузке R_H .

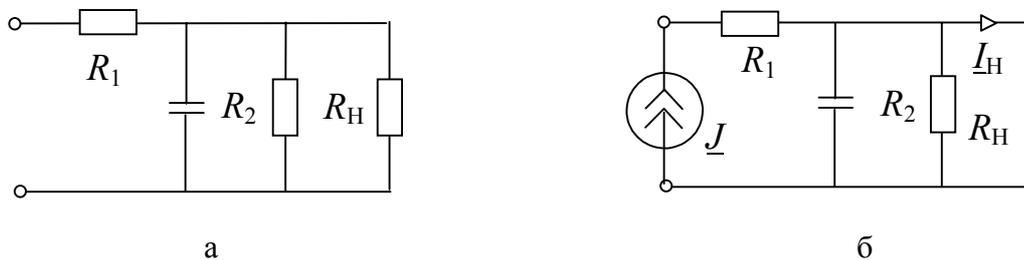


Рис. 3.3.1. Исходная (а) и расчетная (б) схемы

Подключим к цепи источник тока \underline{J} , обозначим ток приемника \underline{I}_H , как показано на рис. 3.3.1 б. Таким образом, коэффициент передачи тока $\underline{\beta} = \underline{I}_H / \underline{J}$. Построение числителя и знаменателя $\underline{\beta}$ сведем в табл. 3.3.3 и 3.3.4.

Таблица 3.3.3. Построение числителя функции β

№	Наименование операций и схемно-алгебраические выражения (САВ)
1	<p>Построение исходного САВ числителя в соответствии со строкой 4 табл. 2.1.1.</p> $\Delta N = \left \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} R_1 \text{---} \\ \text{---} j\omega C \text{---} \\ \text{---} R_2 \text{---} \\ \text{---} R_H \text{---} \end{array} \end{array} \right $
2	<p>Стягивание резисторов, соединенных последовательно с генератором и приемником НУИ, согласно строкам 6 и 8 табл. 2.1.11.</p> $\Delta N = \left \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} j\omega C \text{---} \\ \text{---} R_2 \text{---} \end{array} \end{array} \right $
3	<p>Удаление проводимости и выделение сопротивления в соответствии со строкой 2 табл. 2.1.11 и строкой 2 табл. 2.1.10 соответственно.</p> $\Delta N = R_2^* \left \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \end{array} \right $
4	<p>Вычисление определителя НУИ-контура согласно строки 10 табл. 2.1.4</p> $\Delta N = R_2 \cdot 1 = R_2 .$

Таблица 3.3.4. Построение знаменателя функции

№	Наименование операций и схемно-алгебраические выражения (САВ)
1	2
1	<p>Построение исходного САВ знаменателя в соответствии со строкой 4 табл. 2.1.1</p> $\Delta D = \left \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} R_1 \text{---} \\ \text{---} j\omega C \text{---} \\ \text{---} R_2 \text{---} \\ \text{---} R_H \text{---} \end{array} \end{array} \right $
2	<p>Деление схемы на две подсхемы по узлу a и применение формулы из строки 1 табл. 2.1.12</p> $\Delta D = \left \begin{array}{c} \text{---} R_1 \text{---} \end{array} \right * \left \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} j\omega C \text{---} \\ \text{---} R_2 \text{---} \\ \text{---} R_H \text{---} \end{array} \end{array} \right $

Окончание табл. 3.3.4

1	2
3	<p>Запись определителя разомкнутой ветви с сопротивлением согласно строке 2 табл. 2.1.4. Выделение проводимости конденсатора (см. строку 2 табл. 2.1.9).</p> $\Delta D = 1 * \left(j\omega C * \left(\begin{array}{ c } \hline \begin{array}{c} \text{---} \\ \\ R_2 \\ \\ \text{---} \end{array} \\ \hline \end{array} \right) + \left(\begin{array}{ c } \hline \begin{array}{c} R_2 \\ \\ \text{---} \\ \\ R_H \\ \\ \text{---} \end{array} \\ \hline \end{array} \right) \right)$
4	<p>Нахождение определителя схемы, делимой по одному узлу (см. строку 1 табл. 2.1.12 и строки 1 – 3 настоящей таблицы). Вычисление определителей контуров из сопротивлений согласно строке 4 или строки 6 табл. 2.1.4. Запись окончательного выражения знаменателя</p> $\Delta D = j\omega C R_2 R_H + R_2 + R_H.$

В результате

$$\underline{\beta} = \frac{R_2}{R_2 + R_H + j\omega C R_2 R_H}$$

Символьные выражения АЧХ и ФЧХ:

$$\beta = \frac{R_2}{\sqrt{(R_2 + R_H)^2 + (\omega C R_2 R_H)^2}}; \quad \varphi_\beta = \text{arctg} \frac{\omega C R_2 R_H}{R_2 + R_H}.$$

Графики АЧХ и ФЧХ представлены на рис. 3.3.2, причем фаза измеряется в радианах.

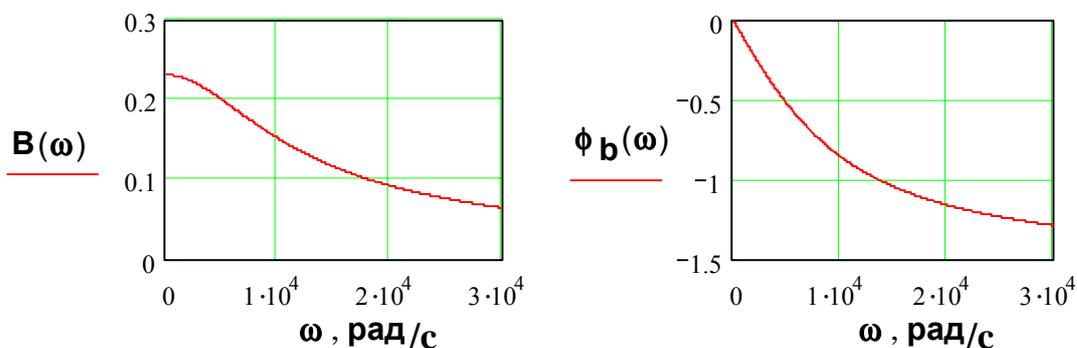


Рис. 3.3.2. Графики зависимостей β и φ_β

Находим формулу для граничной частоты $\omega_{гр}$. Для этого решим уравнение

$$\frac{R_2}{\sqrt{(R_2 + R_H)^2 + (\omega_{зр} CR_2 R_H)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \beta_m,$$

где β_m – максимальный коэффициент передачи цепи. В данном примере

$$\beta_m = \frac{R_2}{R_2 + R_H},$$

Таким образом, граничная частота

$$\omega_{зр} = \frac{R_2 + R_H}{CR_2 \cdot R_H}. \quad (3.3.1)$$

После подстановки численных данных (вариант 1 в табл. 3.3.2)

$$\omega_{зр} = \frac{1500 + 5000}{0,1 \cdot 10^{-6} \cdot 1500 \cdot 5000} = 8666,7 \text{ } 1/\text{рад}.$$

Из (3.3.1) находим формулу для сопротивления нагрузки, при которой $\omega_{гр}$ увеличивается вдвое:

$$R_H = \frac{R_2}{2\omega_{зр} CR_2 - 1} = \frac{1500}{2 \cdot 8666,7 \cdot 0,1 \cdot 10^{-6} \cdot 1500 - 1} = 937,5 \text{ Ом}$$

3.4. КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

В разделе рассматривается анализ характеристик колебательных контуров второго порядка. В задании дается схема замещения последовательного или параллельного контура, содержащая кроме основных реактивных элементов – конденсатора и катушки индуктивности – паразитные резистивные элементы и резистивные сопротивления источников и нагрузки. Необходимо определить основные характеристики колебательного контура: резонансную частоту, добротность, полосу пропускания, частотные характеристики передаточных функций.

Выполнение задания проводится в три этапа. На первом этапе определяется тип колебательного контура (последовательный или параллельный). Второй этап предусматривает формирование необходимых ССФ: входного сопротивления (проводимости), коэффициентов передачи напряжения (тока). Этот этап выполняется с помощью метода схемных определителей. На третьем этапе осуществляется выделение мнимой части комплексной функции входного сопротивления (проводимости) для определения резонансной частоты последовательного (параллельного) контура и нахождения модуля (АЧХ) и аргумента (ФЧХ) комплексного коэффициента передачи напряжения (тока).

3.4.1. Постановка задачи

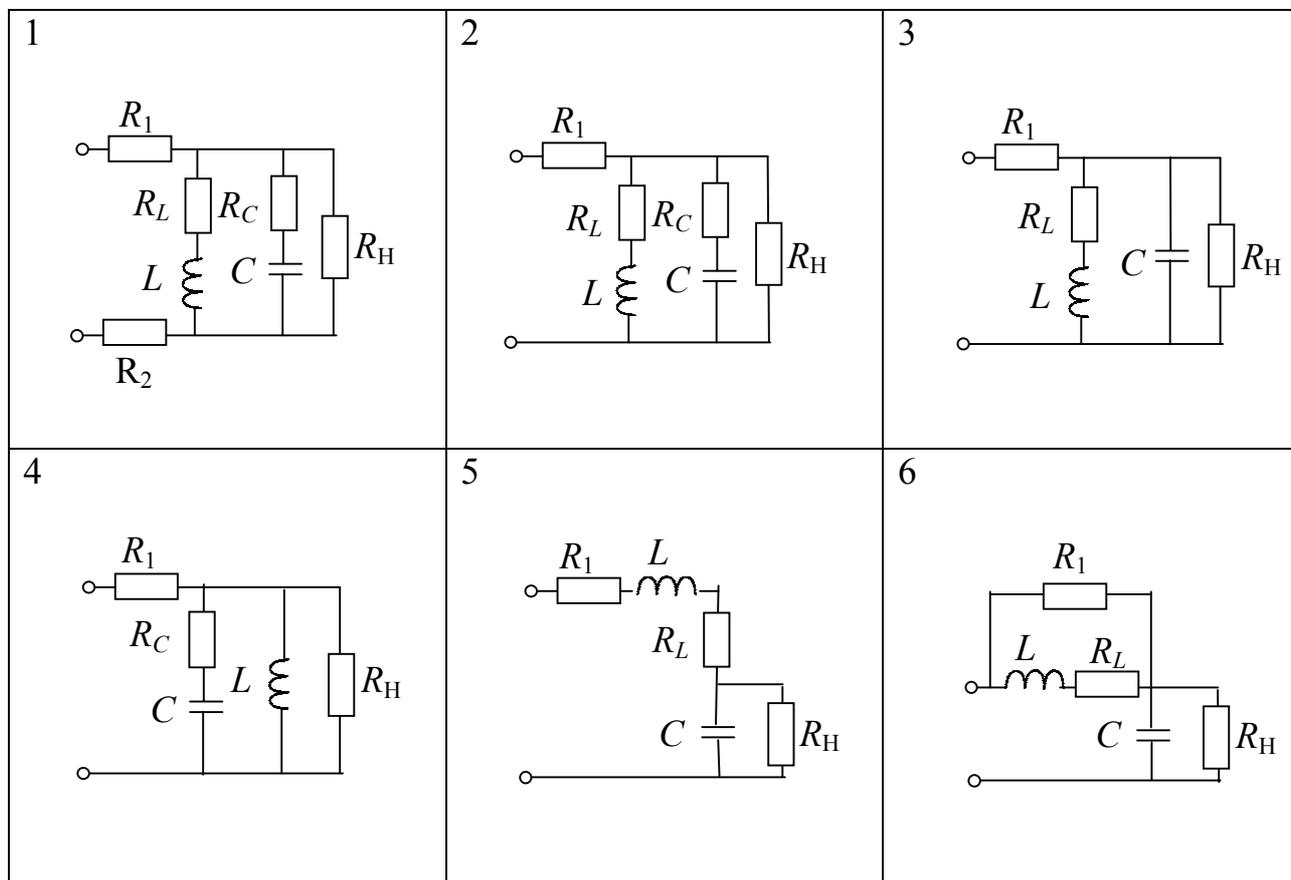
Дано:

- 1) схема колебательного контура в соответствии с индивидуальным вариантом (табл. 3.4.1);
- 2) численные значения параметров элементов в соответствии с групповым вариантом (табл. 3.4.2).

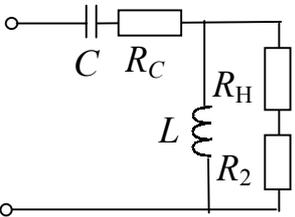
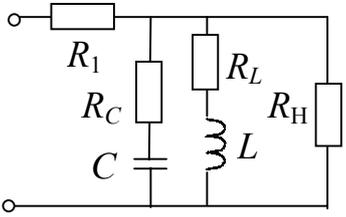
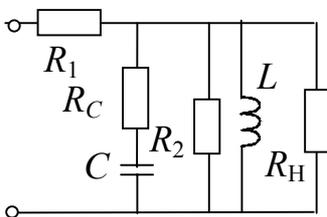
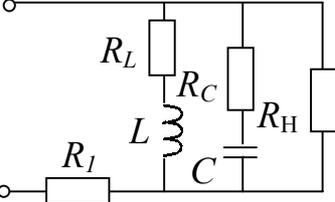
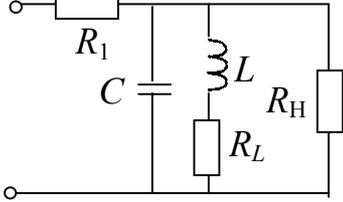
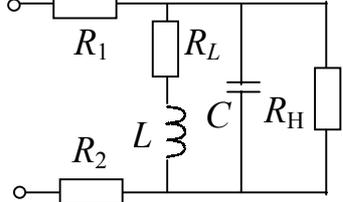
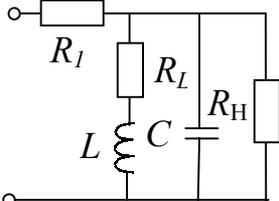
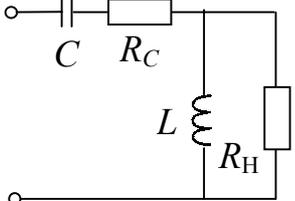
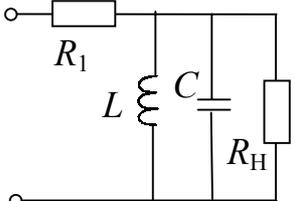
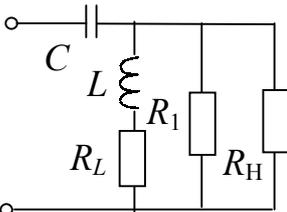
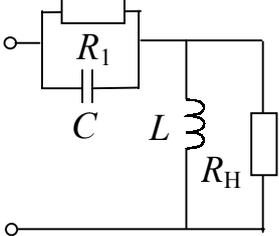
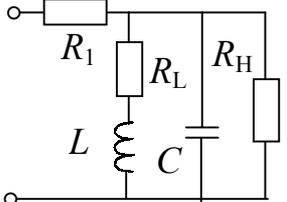
Требуется:

- 1) определить тип данного контура – последовательный или параллельный;
- 2) найти символьное выражение для резонансной частоты контура ω_0 , определить её численное значение;
- 3) записать в комплексном символьном виде выражение для коэффициента \underline{K}_U передачи напряжения со входа схемы к нагрузке;
- 4) найти выражение для АЧХ $K_U(\omega)$ и ФЧХ $\varphi_{KU}(\omega)$;
- 5) получить формулы для добротности контура Q и полосы пропускания $\Delta\omega$, найти численные значения;
- 6) построить графики $K_U(\omega)$ и $\varphi_{KU}(\omega)$.

Таблица 3.4.1. Схемы замещения колебательных контуров



Продолжение табл. 3.4.1

<p>7</p> 	<p>8</p> 	<p>9</p> 
<p>10</p> 	<p>11</p> 	<p>12</p> 
<p>13</p> 	<p>14</p> 	<p>15</p> 
<p>16</p> 	<p>17</p> 	<p>18</p> 

Окончание табл. 3.4.1

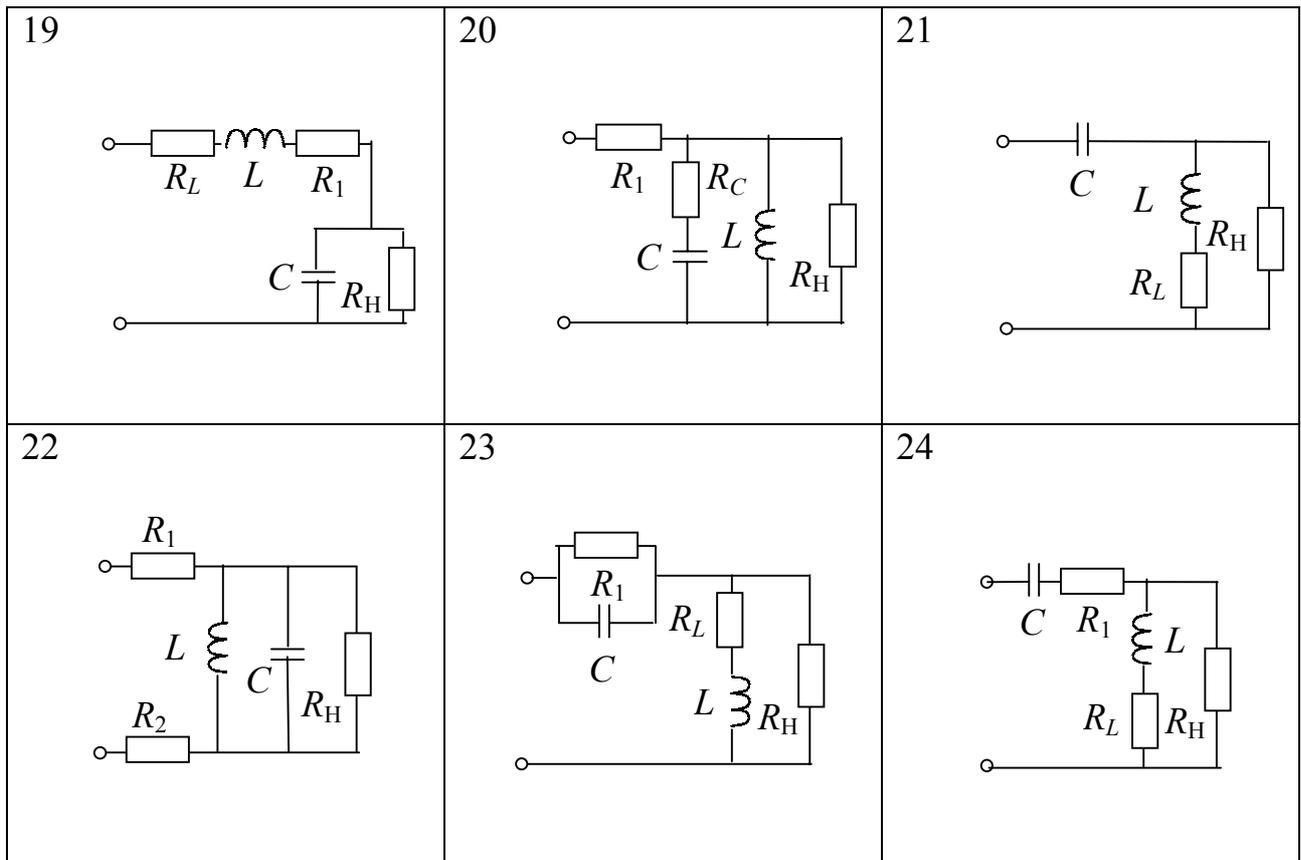


Таблица 3.4.2. Численные значения параметров элементов колебательных контуров

Параметр Вариант	R_1 , кОм	R_2 , Ом	R_H , кОм	R_L , Ом	R_C , Ом	L , мГн	C , мкФ
1	1,0	100	1,2	1,2	0,8	0,1	0,2
2	2,0	50	1,5	1,0	0,9	0,2	0,1
3	3,0	80	1,6	1,5	1,0	0,15	0,15
4	4,0	70	1,8	1,6	1,2	0,18	0,18
5	5,0	60	2,0	1,4	1,4	0,22	0,22

3.4.2. Пример решения задачи

Рассмотрим колебательный контур на рис. 3.4.1 а. Для определения типа контура приведем его к идеальному виду. Для этого замкнем накоротко сопротивление R_L , включенное последовательно с индуктивностью, и

разомкнем сопротивление R_H , соединенное параллельно с ёмкостью. В результате получим последовательный LC -контур. Следовательно, исходный контур (см. рис. 3.4.1 а) также является последовательным.

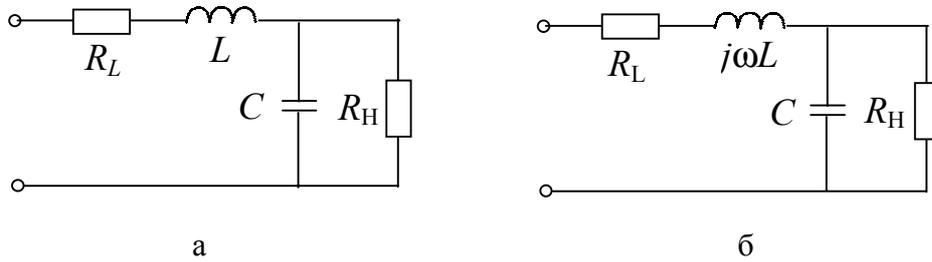


Рис. 3.4.1. Исходная схема (а) и ее комплексная схема замещения (б)

Для определения резонансной частоты ω_0 последовательного контура необходимо построить и решить уравнение

$$X(\omega_0) = 0,$$

где X – реактивное сопротивление схемы.

Предварительно найдем комплексное входное сопротивление схемы на рис. 3.4.1 б, которая получена из рис. 3.4.1 а путем вычисления комплексного сопротивления катушки индуктивности и проводимости конденсатора. Схемно-алгебраические выражения числителя и знаменателя данной функции сформируем с помощью таблиц раздела 2. Последовательность операций по упрощению САВ числителя и знаменателя сведем в табл. 3.4.3 и 3.4.4 соответственно.

Таблица 3.4.3. Формирование выражения числителя входного сопротивления контура

№	Наименование операций и схемно-алгебраические выражения (САВ)
1	2
1	Построение исходного САВ числителя согласно строке 5 табл. 2.1.1. $\Delta N = \left \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{---} R_L \text{---} j\omega L \text{---} \\ \parallel \\ j\omega C \parallel R_H \end{array} \end{array} \right $
2	Выделение проводимости (см. строку 2 табл. 2.1.1). $\Delta N = j\omega C \cdot \left \begin{array}{c} \text{---} R_L \text{---} j\omega L \text{---} \\ \parallel \\ R_H \end{array} \right + \left \begin{array}{c} \text{---} R_L \text{---} j\omega L \text{---} \\ \parallel \\ R_H \end{array} \right $

Окончание табл. 3.4.3

1	2
3	<p>Нахождение определителя схемы, разделимой по одному узлу (см. строку 1 табл. 2.1.12). Запись определителя контура из сопротивлений в соответствии со строкой 6 табл. 2.1.4.</p> $\Delta N = j\omega C \cdot \left \begin{array}{c} \text{---} R_L \text{---} j\omega L \text{---} \\ \text{---} \end{array} \right * \left \begin{array}{c} R_H \\ \text{---} \end{array} \right + R_L + j\omega L + R_H$
4	<p>Вычисление определителей z-петли и контура из сопротивлений (см. строки 4 и 6 табл. 2.1.4)</p> $\Delta N = j\omega C (R_L + j\omega L) R_H + R_L + j\omega L + R_H.$
5	<p>Группирование действительной и мнимой частей. Запись окончательного выражения числителя</p> $\Delta N = R_H + R_L - \omega^2 L C R_H + j\omega (R_H R_L C + L).$

Таблица 3.4.4. Формирование выражения знаменателя входного сопротивления контура

№	Наименование операций и схемно-алгебраические выражения (САВ)
1	<p>Построение исходного САВ (см. строку 5 табл. 2.1.1).</p> $\Delta D = \left \begin{array}{c} \text{---} R_L \text{---} j\omega L \text{---} \\ \text{---} j\omega C \text{---} R_H \end{array} \right $
2	<p>Нахождение определителя схемы, разделимой по одному узлу в соответствии со строкой 1 табл. 2.1.12.</p> $\Delta D = \left \begin{array}{c} R_L \text{---} j\omega L \text{---} \\ j\omega C \text{---} R_H \end{array} \right $
3	<p>Вычисление определителя разомкнутой z-ветви (см. строку 2 табл. 2.1.4). Запись определителя контура из сопротивления и проводимости согласно строке 8 табл. 2.1.4.</p> $\Delta D = 1 \cdot (R_H \cdot j\omega C + 1).$

В результате

$$Z_{BX} = \frac{R_H + R_L - \omega^2 L C R_H + j\omega (R_H R_L C + L)}{1 + j\omega C R_H}. \quad (3.4.1)$$

Выделим реактивное сопротивление в (3.4.1). Для этого числитель и знаменатель (3.4.1) умножим на сопряженное по отношению к знаменателю комплексное выражение $(1-j\omega CR_H)$. В результате получаем

$$X(\omega_0) = \frac{\omega_0(R_H R_L C + L) - \omega_0 C R_H (R_H + R_L - \omega^2 L C R_H)}{1 + (\omega C R_H)^2} = 0. \quad (3.4.2)$$

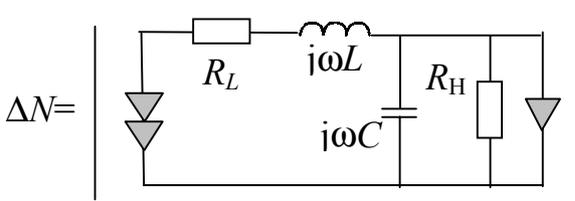
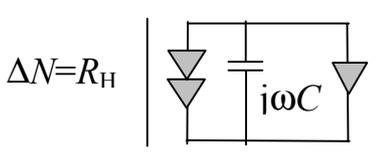
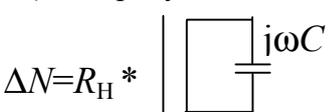
Решая уравнение (3.4.2), находим

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{-L + C R_H^2}{L C^2 R_H}} = \sqrt{\frac{1}{L C} - \frac{1}{C^2 R_H^2}}.$$

Значение $\omega_0 = 316100$ рад/с при численных параметрах элементов $C = 1 \mu\text{кФ}$, $L = 1 \text{мГн}$, $R_H = 1000 \text{ Ом}$.

Комплексный коэффициент передачи напряжения \underline{K}_U находится по схемно-алгебраической формуле (см. строку 1 табл. 2.1). Как видно, знаменатель \underline{K}_U совпадает с числителем входного сопротивления \underline{Z}_{ex} . Остается определить числитель \underline{K}_U . Операции по формированию числителя \underline{K}_U сведены в табл. 3.4.5.

Таблица 3.4.5. Формирование выражения числителя \underline{K}_U

№	Наименование операций и схемно-алгебраические выражения (САВ)
1	<p>Построение исходного САВ в соответствии со строкой 1 табл. 2.1.1.</p> 
2	<p>Стягивание сопротивлений, включенных последовательно с генератором НУИ (см. строку 6 табл. 2.1.11). Выделение сопротивления, соединенного параллельно с приемником НУИ (см. строку 4 табл. 2.1.10).</p> 
3	<p>Замена параллельного однонаправленного соединения генератора и приемника НУИ короткозамкнутым проводом (см. строку 1 табл. 2.1.1).</p> 
4	<p>Нахождение определителя контура с проводимостью (см. строку 6 табл. 2.1.2).</p> $\Delta N = R_H \cdot 1 = R_H.$

В результате

$$\underline{K} = \frac{R_H}{R_H + R_L - \omega^2 LCR_H + j\omega(L + CR_L R_H)}.$$

Запишем АЧХ

$$K(\omega) = \frac{R_H}{\sqrt{(R_H + R_L - \omega^2 LCR_H)^2 + \omega^2 (L + CR_L R_H)^2}}$$

и ФЧХ

$$\varphi_K(\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega(L + CR_L R_H)}{R_H + R_L - \omega^2 LCR_H}\right), \quad \text{если } R_H + R_L \geq \omega^2 LCR_H;$$

$$\varphi_K(\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega(L + CR_L R_H)}{R_H + R_L - \omega^2 LCR_H}\right) - \pi, \quad \text{если } R_H + R_L < \omega^2 LCR_H.$$

Добротность контура

$$Q = K(\omega_0) = \frac{R_H}{\sqrt{(R_H + R_L - \omega_0^2 LCR_H)^2 + \omega_0^2 (L + CR_L R_H)^2}}$$

Полоса пропускания

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

После подстановки численных значений $Q=15,811$; $\Delta\omega=19990$ рад/с.

Графики $K(\omega)$ и $\varphi_K(\omega)$ представлены на рис. 3.4.2 а и 3.4.2 б соответственно, причем фаза измеряется в радианах.

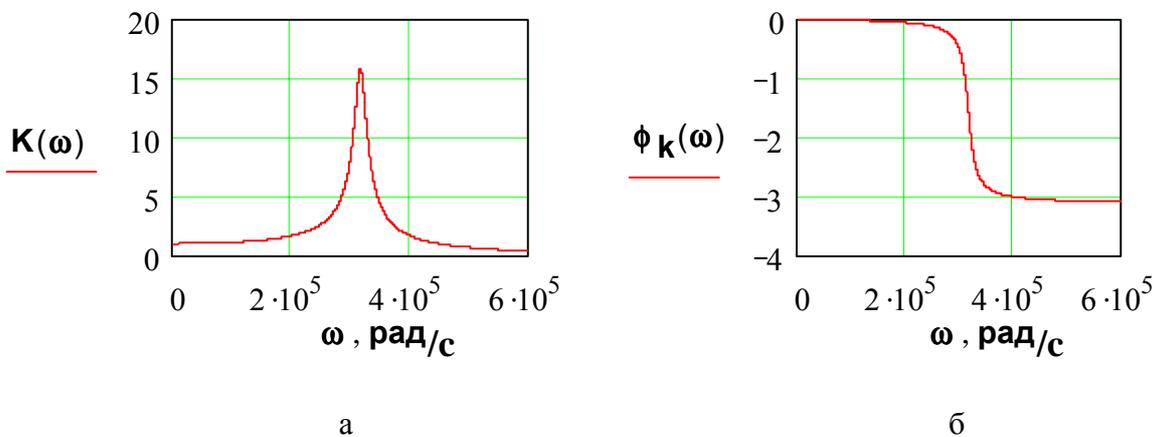


Рис. 3.4.2. Графики АЧХ (а) и ФЧХ (б) контура

3.5. ЦЕПИ С ВЗАИМОИНДУКТИВНОСТЯМИ

Для освоения символьного анализа цепей, содержащих взаимноиндуктивности, необходимо определить характеристики гармонического режима ниже предлагаемых схем, а также провести исследование символьного решения. Работа выполняется в три этапа. На первом этапе формируется символьное операторное выражение искомого напряжения с помощью метода схемных определителей. Второй этап требует записи соответствующих гармонических функций времени и построения графиков. На третьем этапе проводится исследование ССФ на предмет нулевого решения.

Построение символьной функции цепи с взаимноиндуктивностями может проводиться как непосредственно по формуле выделения взаимноиндуктивности (см. строки 1–3 табл. 2.1.13), так и путем замещения взаимноиндуктивности двумя источниками ИНУТ (см. строки 1 и 3 в табл. 2.1.13). В последнем случае применяется формула выделения ИНУТ из строки 3 табл. 2.1.9. В примере (см. пункт 3.5.2.) иллюстрируются оба эти подхода.

3.5.1. Постановка задачи

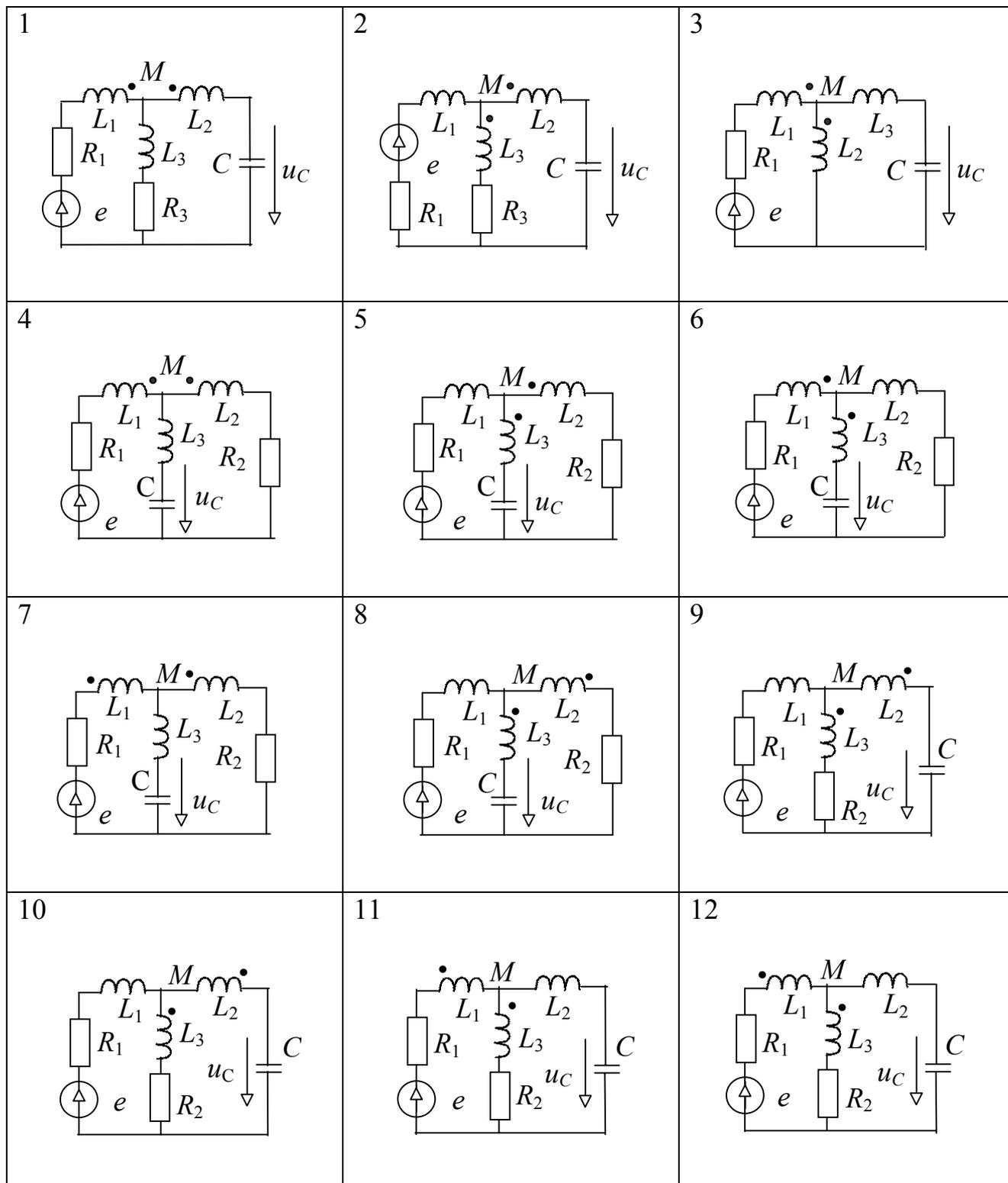
Дано:

- 1) схема электрической цепи в соответствии с индивидуальным вариантом (табл. 3.5.1);
- 2) численные значения параметров элементов в соответствии с групповым вариантом (табл. 3.5.2), в качестве базисной гармонической функции принять синус.

Требуется:

- 1) построить символьное выражение $U_C(p)$;
- 2) найти численные значения действующего значения напряжения U_C и начальной фазы φ_{UC} ;
- 3) записать выражения для мгновенных значений функции $u_C(t)$ и $e(t)$;
- 4) построить графики $u_C(t)$ и $e(t)$;
- 5) найти символьное соотношение параметров, при котором $U_C=0$ (при условии, что напряжение источника ЭДС не равно нулю, а параметры элементов, в том числе частота, не могут принимать бесконечно большие значения).

Таблица 3.5.1. Схемы цепей с взаимными индуктивностями



Окончание табл. 3.5.1

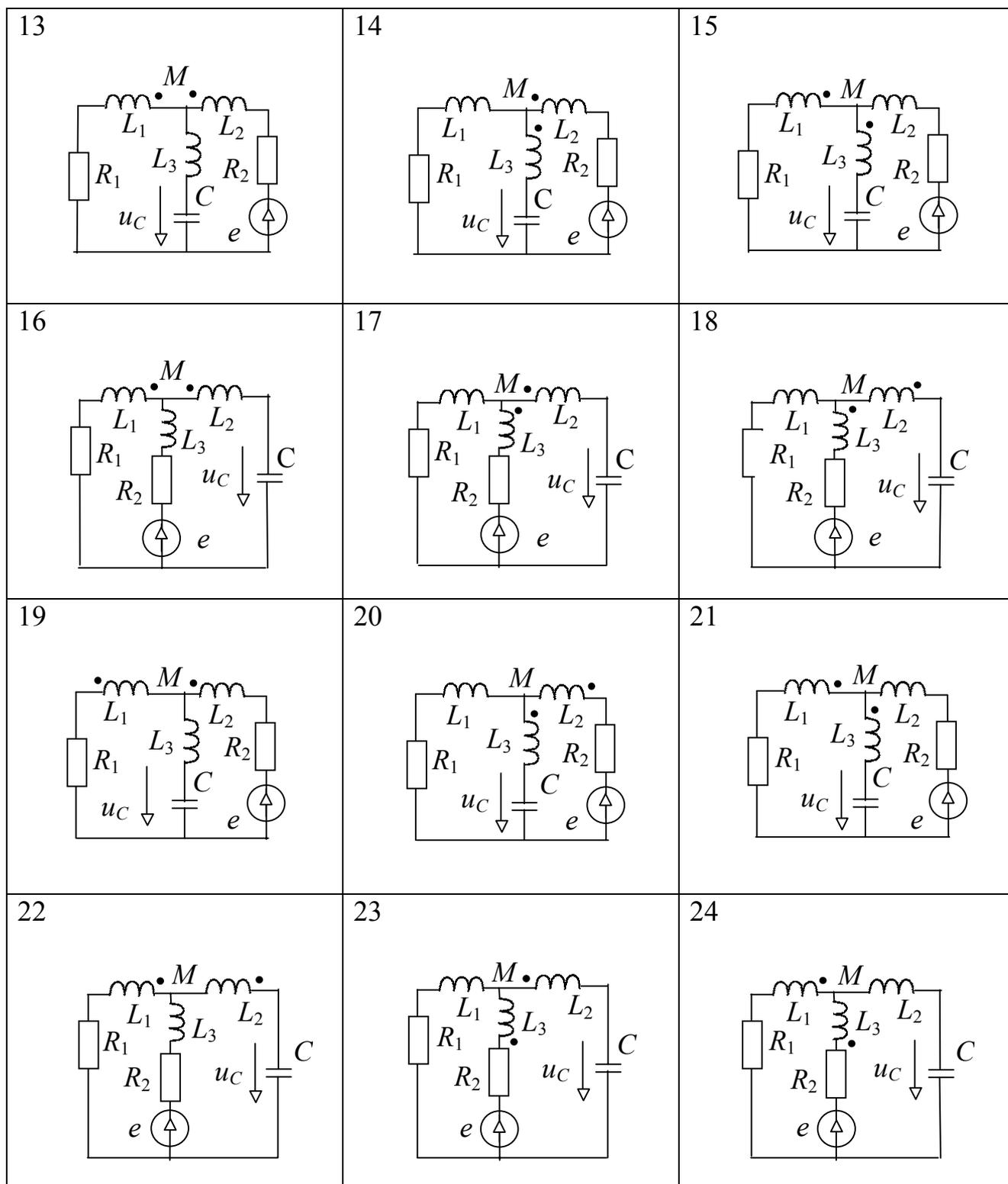


Таблица 3.5.2. Численные значения параметров элементов

Вариант	1	2	3	4	5
Параметр					
$R_1, \text{ Ом}$	10	12	14	18	20
$R_2, \text{ Ом}$	20	22	24	28	30
$R_3, \text{ Ом}$	30	32	34	38	40
$C, \text{ мкФ}$	200	180	160	140	120
$L_1, \text{ мГн}$	32	15	20	12	10
$L_2, \text{ мГн}$	14	10	12	8	6
$L_3, \text{ мГн}$	20	10	14	10	5
$K_{\text{св}}$	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3
$E, \text{ В}$	80	60	40	50	20
$\varphi_E, \text{ рад}$	$-\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/2$	π
$f, \text{ Гц}$	50	200	400	100	600

3.5.2. Пример решения задачи

Рассмотрим анализ электрической цепи, изображенной на рис. 3.5.1 а. Сформируем сначала символьное выражение для искомого напряжения на конденсаторе в операторной форме. Для этого представим на рис. 3.5.1 б операторную схему замещения исходной цепи.

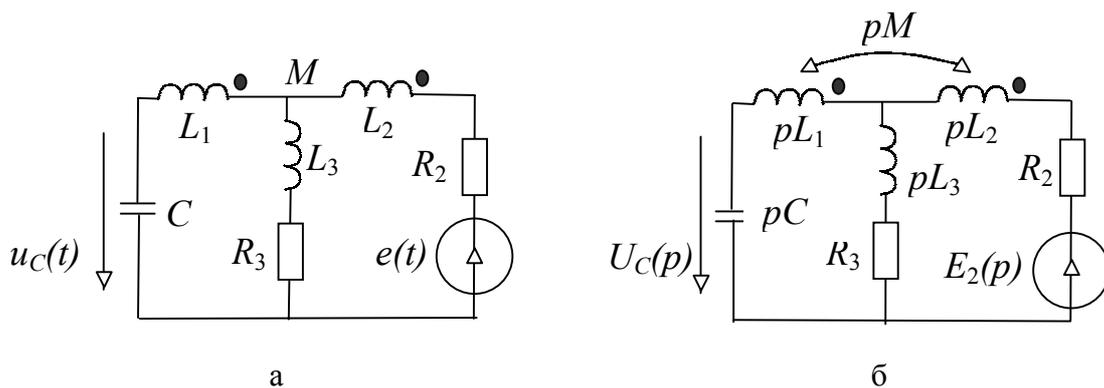


Рис. 3.5.1. Исходная схема (а) и ее операторная схема замещения (б)

Искомое операторное напряжение

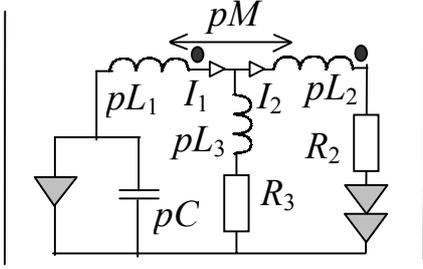
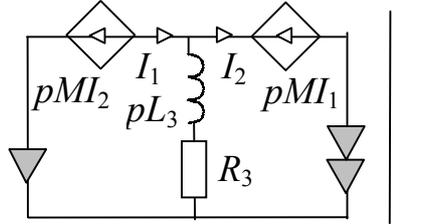
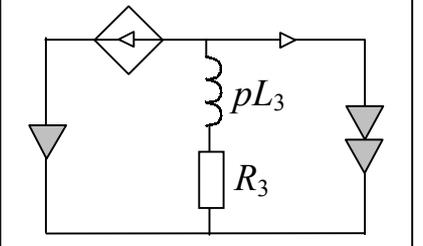
$$U_c(p) = K_{EC}(p) \cdot E(p),$$

где коэффициент передачи напряжения (от источника $E(p)$ к конденсатору C)

$$K_{EC}(p) = \frac{\Delta N(p)}{\Delta D(p)}, \quad (3.5.1)$$

причем числитель $\Delta N(p)$ и знаменатель $\Delta D(p)$ формируются в операторной форме. Операции построения числителя и знаменателя сгруппированы в табл. 3.5.3 и 3.5.4 соответственно. В указанных таблицах из-за недостатка места операторные изображения токов обозначены I_1 и I_2 .

Таблица 3.5.3. Формирование числителя функции $K_{EC}(p)$

№	Наименование операций и схемно-алгебраические выражения (САВ)
1	2
1	<p>Построение исходного САВ числителя в соответствии со строкой 1 табл. 2.1.1.</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> $\Delta N =$  </div>
2	<p>Замена индуктивной связи управляемыми источниками согласно строки 1 табл. 2.1.13, удаление проводимости pC (см. строку 4 табл. 2.1.11) и стягивание сопротивлений pL_1, pL_2, R_2 (см. строки 6 и 8 табл. 2.1.11).</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> $\Delta N =$  </div>
3	<p>Нейтрализация ИНУТ согласно строке 14 или строке 16 табл. 2.1.1.</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> $\Delta N =$  </div>

Окончание табл. 3.5.3

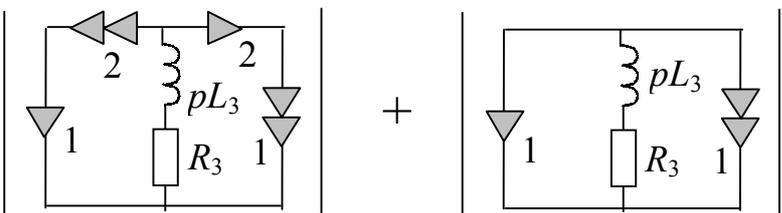
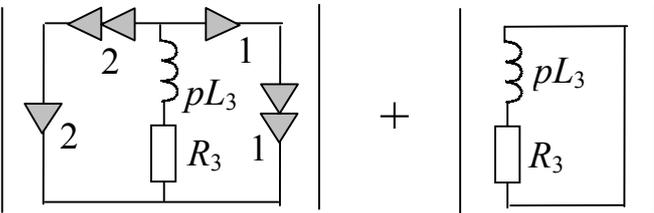
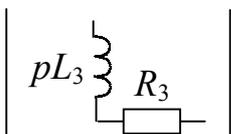
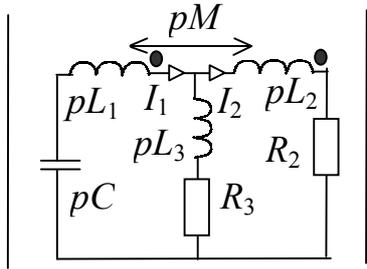
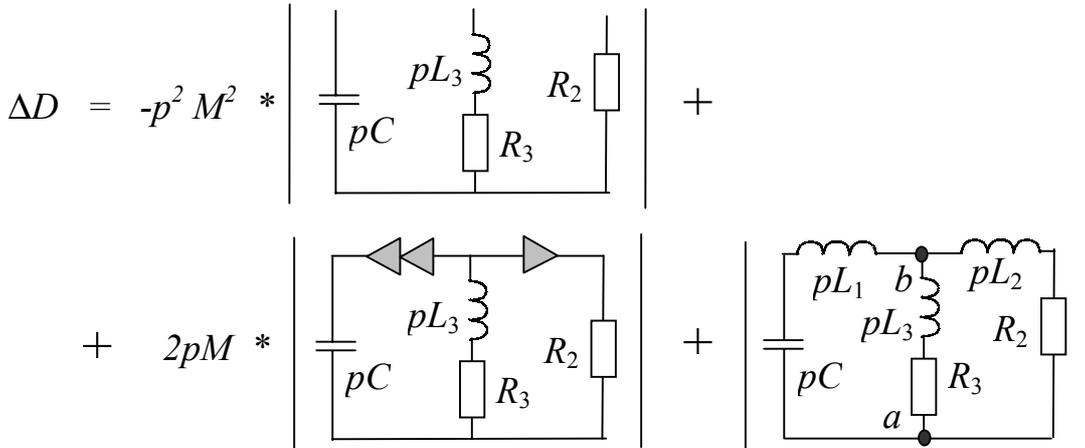
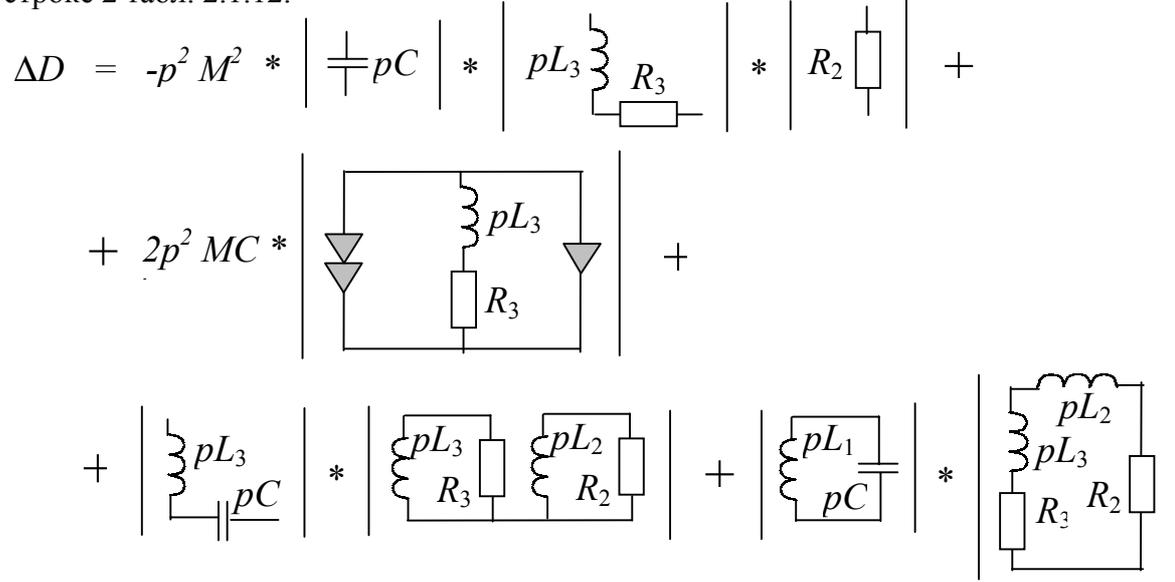
1	2
4	<p>Выделение параметра ИНУТ в соответствии со строкой 3 табл. 2.1.9</p> $\Delta N = pM * \left \begin{array}{c} \text{Circuit 1} \\ \text{Circuit 2} \end{array} \right + \left \begin{array}{c} \text{Circuit 3} \\ \text{Circuit 4} \end{array} \right $ 
5	<p>Изменение нумерации приемников НУИ согласно строке 6 табл. 2.1.8. Замена параллельного соединения генератора и приемника НУИ отрезком проводника в соответствии со строкой 1 табл. 2.1.8.</p> $\Delta N = pM * \left \begin{array}{c} \text{Circuit 1} \\ \text{Circuit 2} \end{array} \right + \left \begin{array}{c} \text{Circuit 3} \\ \text{Circuit 4} \end{array} \right $ 
6	<p>Исключение из схемы двух последовательных соединений генератора и приемника НУИ согласно строке 4 табл. 2.1.8. Запись определителя элементарной схемы – z-контур в соответствии со строкой 6 табл. 2.1.4</p> $\Delta N = pM * \left \begin{array}{c} \text{Circuit 1} \\ \text{Circuit 2} \end{array} \right + R + pL_3 .$ 
7	<p>Вычисление определителя элементарной схемы – разомкнутой z-ветви согласно строки 2 табл. 2.1.4. Запись окончательного выражения числителя</p> $\Delta N = -pM + R_3 + pL_3 .$

Таблица 3.5.4. Формирование знаменателя функции $K_{EC}(p)$

№	Наименование операций и схемно-алгебраические выражения (САВ)
1	2
1	<p>Получение исходного САВ знаменателя в соответствии с табл. 2.1.1.</p> $\Delta D = \left \begin{array}{c} \text{Circuit} \end{array} \right $ 

Окончание табл. 3.5.4

1	2
2	<p data-bbox="304 322 1417 353">Выделение сопротивления взаимной индуктивности согласно строки 2 табл. 2.1.13.</p> $\Delta D = -p^2 M^2 * \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \\ pC \\ \\ \text{---} \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} pL_3 \\ \\ R_3 \\ \\ \text{---} \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} R_2 \\ \\ \text{---} \end{array} \right] +$ $+ 2pM * \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \\ pC \\ \\ \text{---} \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} pL_3 \\ \\ R_3 \\ \\ \text{---} \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \\ R_2 \\ \\ \text{---} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} pL_1 \text{---} b \\ \\ pL_3 \\ \\ R_3 \\ \\ a \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} pL_2 \\ \\ R_2 \\ \\ \text{---} \end{array} \right]$ 
3	<p data-bbox="229 837 1436 1016">Нахождение в первом слагаемом определителя схемы, разделимой по одному узлу (см. строку 1 табл. 2.1.12). Выделение во втором слагаемом проводимости pC (см. строку 6 табл. 2.1.10) и стягивание сопротивления (см. строку 8 табл. 2.1.11). Применение к третьему слагаемому формулы деления по двум узлам a и b согласно строке 2 табл. 2.1.12.</p> $\Delta D = -p^2 M^2 * \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \\ pC \\ \\ \text{---} \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} pL_3 \\ \\ R_3 \\ \\ \text{---} \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} R_2 \\ \\ \text{---} \end{array} \right] +$ $+ 2p^2 MC * \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \\ pL_3 \\ \\ R_3 \\ \\ \text{---} \end{array} \right] +$ $+ \left[\begin{array}{c} pL_3 \\ \\ pC \\ \\ \text{---} \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} pL_3 \\ \\ R_3 \\ \\ \text{---} \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} pL_2 \\ \\ R_2 \\ \\ \text{---} \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} pL_1 \\ \\ pC \\ \\ \text{---} \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} pL_2 \\ \\ pL_3 \\ \\ R_3 \\ \\ R_2 \\ \\ \text{---} \end{array} \right]$ 
4	<p data-bbox="229 1610 1436 1935">В первом слагаемом записываем определитель элементарной схемы – разомкнутой y-ветви (см. строку 3 табл. 2.1.4), выполняем преобразование последовательного соединения сопротивлений и заносим определитель разомкнутой z-ветви (см. строку 2 табл. 2.1.4). Схема во втором слагаемом уже была рассмотрена выше (см. строки 4, 5 и 6 табл. 2.5.3). В третьем слагаемом записываем определитель элементарной yz-схемы из строки 9 табл. 2.1.4, находим определитель схемы в виде двух z-петель согласно строки 1 табл. 2.1.12 и строки 4 табл. 2.1.4. В четвертом слагаемом заносим определитель элементарной yz-схемы (см. строку 8 табл. 2.1.4) и применяем формулу для схемы в виде z-контура (см. строку 6 табл. 2.1.4).</p> <p data-bbox="325 1939 638 1971">В результате получаем</p> $\Delta D = -p^3 M^2 C + 2p^2 MC(R_3 + pL_3) + pC((R_3 + pL_3) \cdot (pL_2 + R_2) + (p^2 L_1 C + 1)(p(L_2 + L_3) + R_2 + R_3)).$

Таким образом, операторное напряжение

$$U_c(p) = \frac{[R_3 + p(L_3 - M)] \cdot E_2(p)}{-p^3 M^2 C + 2p^2 MCZ_3 + pC[Z_3(p(L_1 + L_2) + R_2) + pL_1 Z_2] + Z}, \quad (3.5.2)$$

где $Z = R_2 + pL_2 + R_3 + pL_3$.

Заменим в (3.5.2) оператор p на $j\omega$. В результате действующее напряжение

$$U_c = |U_c(j\omega)| = \frac{|\Delta N(j\omega)|}{|\Delta D(j\omega)|}, \quad (3.5.3)$$

где модуль числителя

$$|\Delta N(j\omega)| = E \cdot \sqrt{R_3^2 + \omega^2 (L_3 - M)^2};$$

модуль знаменателя

$$|\Delta D(j\omega)| = \sqrt{A^2 + B^2},$$

причем

$$A = R_2 + R_3 - \omega^2 C [2MR_3 + R_3(L_1 + L_2) + L_3 R_2 + L_1 R_2];$$

$$B = -\omega^3 C [-M^2 + 2ML_3 + L_3(L_1 + L_2) + L_1 L_2] + \omega R_2 R_3 C_1 + L_2 + L_3.$$

Начальная фаза напряжения на конденсаторе

$$\varphi_{UC} = \varphi_E + \arctg\left(\frac{\omega(L_3 - M)}{R_3}\right) - \arctg\left(\frac{B}{A}\right), \quad \text{если } A \geq 0;$$

или
$$\varphi_{UC} = \varphi_E + \arctg\left(\frac{\omega(L_3 - M)}{R_3}\right) - \arctg\left(\frac{B}{A}\right) - \pi, \quad \text{если } A < 0.$$

Запишем выражения для мгновенных значений напряжения на конденсаторе и ЭДС:

$$u_c(t) = U_c \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_{UC}); \quad e(t) = E \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_e).$$

При численных данных из варианта 1 в табл. 3.5.2 $U_c = 59.223$ В, $\varphi_{UC} = -2.427$ рад. Графики функций представлены на рис. 3.5.2. Переменные на графиках измеряются в основных единицах системы СИ.

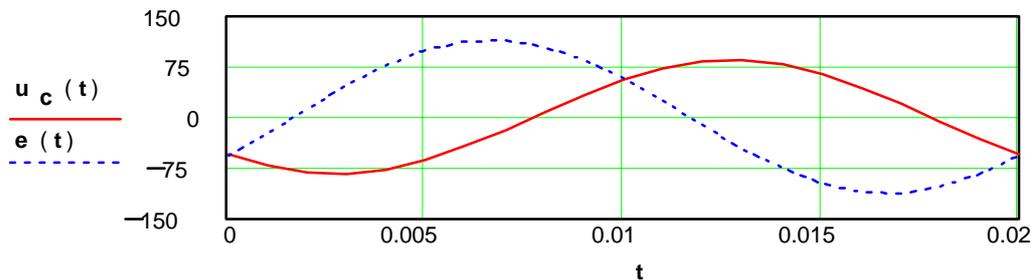


Рис. 3.5.2. Графики функций $u_c(t)$ и $e(t)$

Теперь найдем соотношение параметров, при котором напряжение $U_c = 0$. Очевидно, это равенство выполняется, если числитель (3.5.3) равен нулю или знаменатель принимает бесконечно большие значения. Последнее условие невозможно при конечных значениях параметров элементов и частоты источника. Числитель может быть равным нулю при $R_3 = 0$ и $L_3 - M = 0$. В этом случае напряжение $U_c = 0$.

3.6. ЦЕПИ С ИДЕАЛЬНЫМИ ТРАНСФОРМАТОРАМИ

Идеальные трансформаторы применяются для моделирования, расчета и синтеза согласующих (по уровню напряжения или сопротивлению) устройств, фильтров, избирательных устройств. Для освоения алгоритма анализа цепей с идеальными трансформаторами предлагается выполнить следующее задание.

3.6.1. Постановка задачи

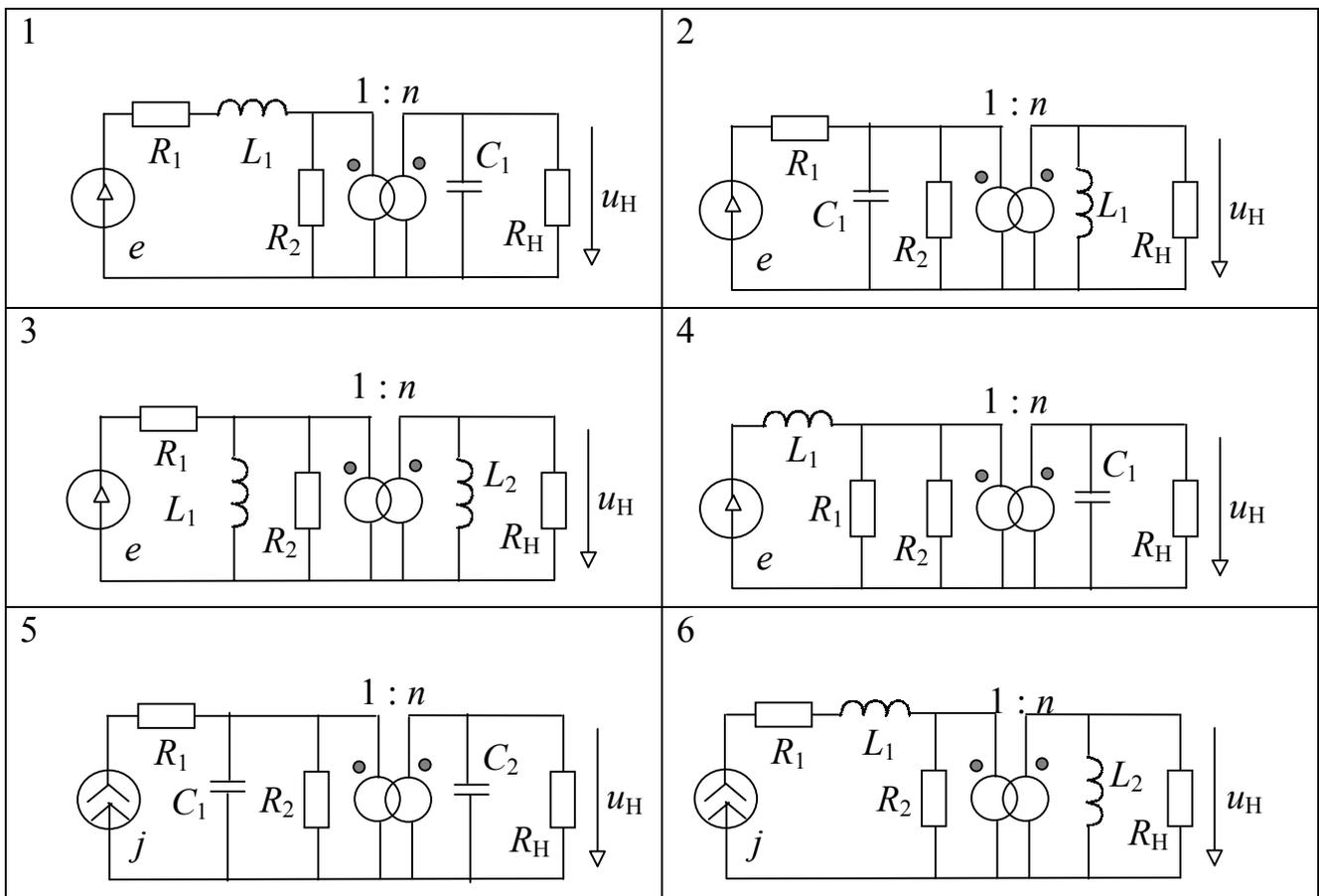
Дано:

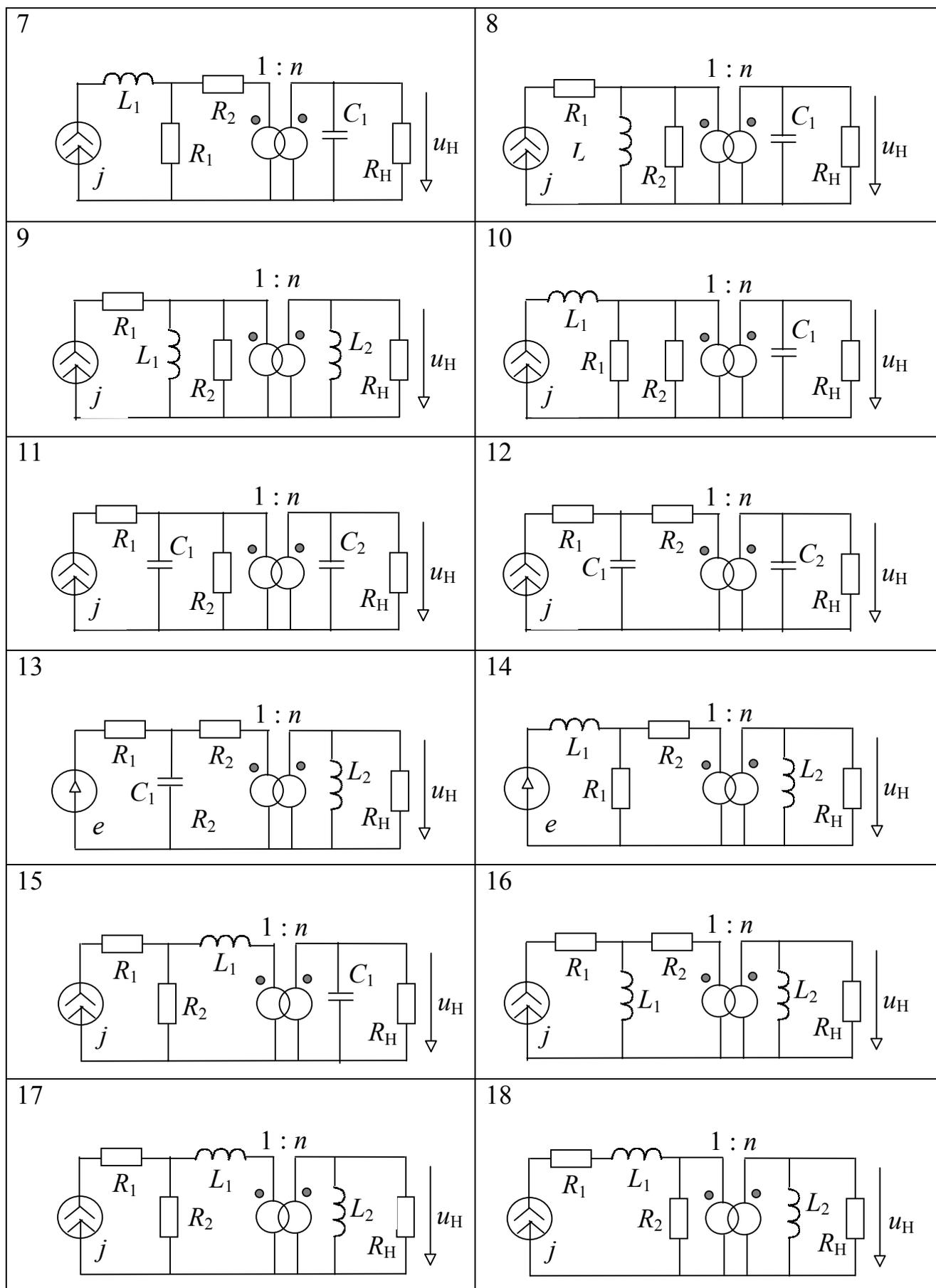
- 1) схема цепи (табл. 3.6.1) в соответствии с индивидуальным вариантом;
- 2) параметры элементов (табл. 3.6.2) в соответствии с групповым вариантом.

Требуется:

- 1) построить комплексную схему замещения цепи;
- 2) найти в символьной форме выражение для действующего комплекса напряжений на нагрузке R_H ;
- 3) определить численные значения амплитуды и фазы выходного напряжения;
- 4) записать численные выражения для мгновенных значений $e(t)$ или $j(t)$ и напряжения нагрузки $u_H(t)$;
- 5) построить графики.

Таблица 3.6.1. Схемы с идеальными трансформаторами





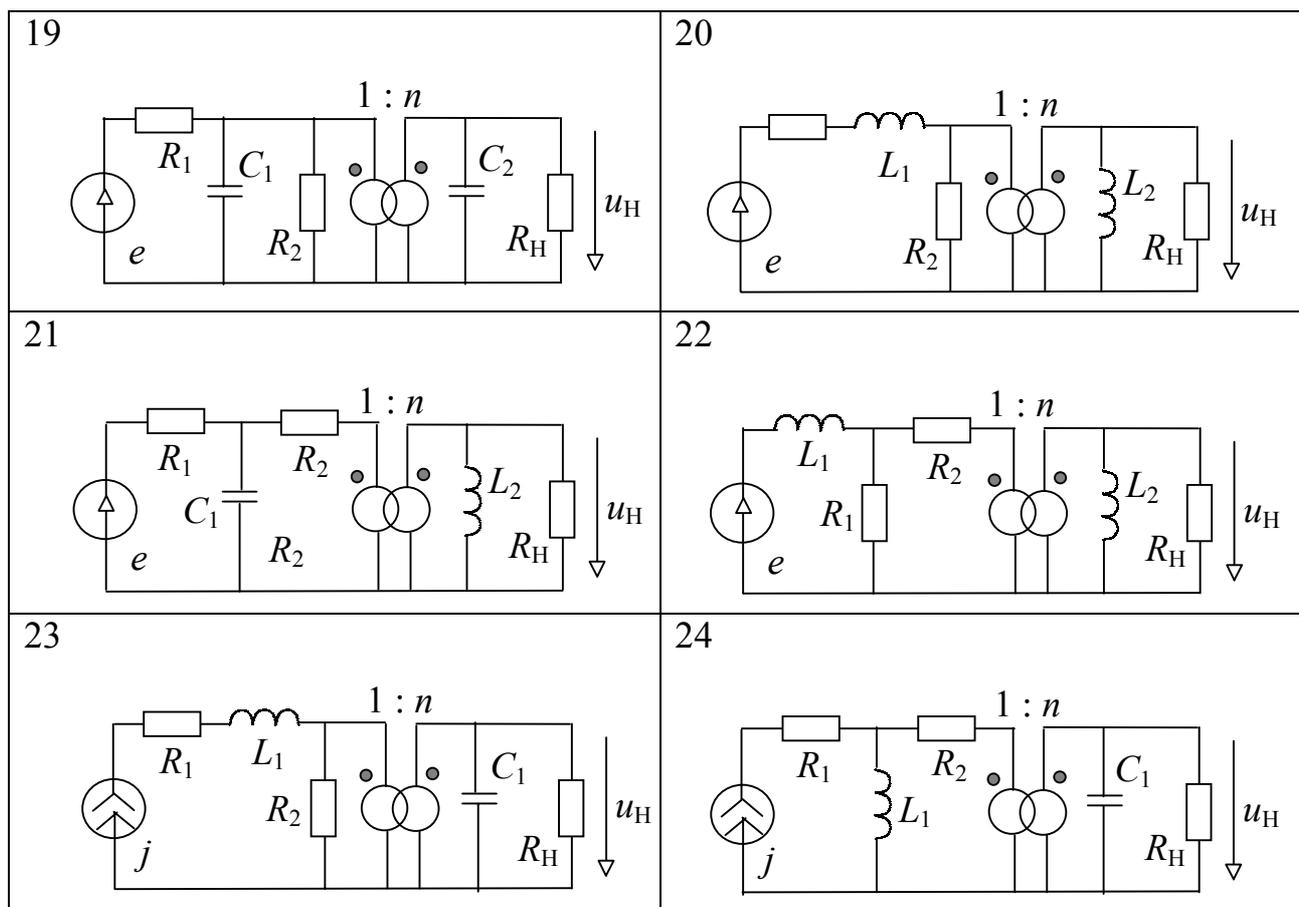


Таблица 3.6.2. Численные значения параметров элементов

Параметр \ Вариант	1	2	3	4	5
R_1 , Ом	10	20	30	40	50
R_2 , Ом	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
C_1 , мкФ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
C_2 , мкФ	0,02	0,03	0,02	0,01	0,01
L_1 , мГн	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
L_2 , мГн	9	15	25	30	50
E , В	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0
φ_E , рад	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/6$
J , А	0,01	0,02	0,03	0,01	0,02
φ_J , рад	$\pi/12$	$\pi/4$	$\pi/6$	$\pi/3$	$\pi/8$
n	3	4	5	6	7
f , кГц	1	2	3	4	5

3.6.2. Пример решения задачи

Рассмотрим схему на рис. 3.6.1 а. Построение её комплексной схемы замещения заключается в определении комплексных параметров элементов и по существу не отличается от соответствующей процедуры в пункте 3.2.2 пособия. Комплексная схема замещения цепи представлена на рис. 3.6.1 б.

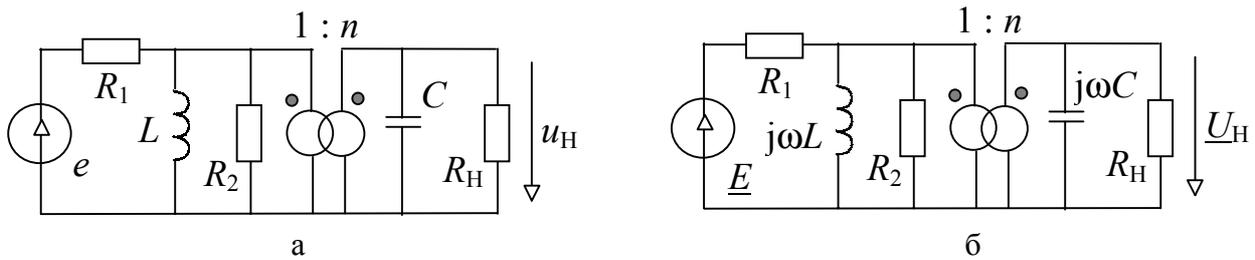


Рис. 3.6.1. Исходная схема (а) и ее комплексная схема замещения (б)

Для нахождения символьного выражения действующего комплекса напряжений на нагрузке необходимо построить формулу для комплексного коэффициента передачи по напряжению. Особенностью анализа цепей с трансформаторами является применение операции выделения коэффициента трансформации (см. строку 4 табл. 2.1.13). Все операции построения числителя и знаменателя коэффициента \underline{K} для схемы на рис. 3.6.1 б сведены в табл. 3.6.3 и 3.6.4 соответственно.

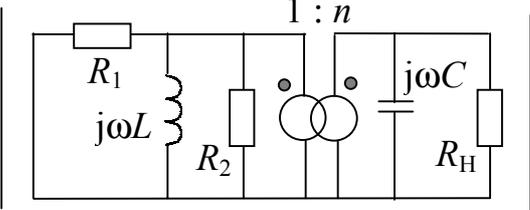
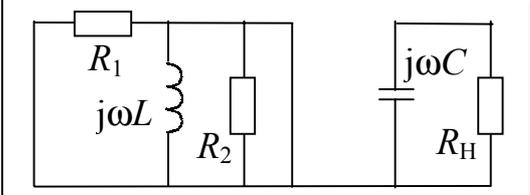
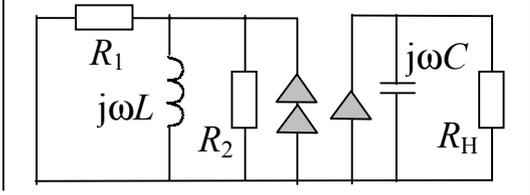
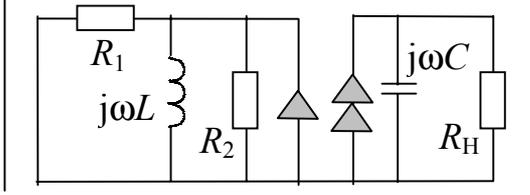
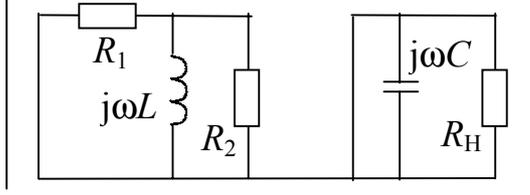
Таблица 3.6.3. Нахождение числителя функции \underline{K}

№	Наименование операций и схемно-алгебраические выражения (САВ)
1	2
1	<p>Исходное САВ числителя в соответствии со строкой 1 табл. 2.1.13.</p> <p>The diagram shows a circuit for the numerator of the transfer function ΔN. It consists of a voltage source 1 in series with a resistor R_1. This is followed by a parallel combination of an inductor $j\omega L$ and a resistor R_2. A transformer with turns ratio $1:n$ is connected in series. The secondary side of the transformer is in parallel with a capacitor $j\omega C$ and a load resistor R_H. The voltage across the load is 1.</p>

Окончание табл. 3.6.3

1	2
2	<p>Выделение коэффициента трансформации согласно строке 4 табл. 2.1.13.</p> <p>$\Delta N = n^2 *$</p> <p>$+ n *$</p> <p>$+ n *$</p> <p>$+$</p>
3	<p>После стягивания R_1 (см. строку 6 табл. 2.1.11) первое и второе слагаемые равны нулю в соответствии со строкой 2 и строкой 8 табл. 2.1.7 соответственно. Четвертое слагаемое также равно нулю (см. строку 3 табл. 2.1.7). В третьем слагаемом удаляется проводимость (см. строку 2 табл. 2.1.11) и выделяются сопротивления согласно строке 2 или 4 табл. 2.1.10.</p> <p>$\Delta N = nR_2R_Hj\omega L *$</p>
4	<p>Стягивание сопротивления (см. строку 6 или 8 табл. 2.1.11), перенумерация приемников НУИ согласно строке 6 табл. 2.1.8.</p> <p>$\Delta N = nR_2R_Hj\omega L \cdot (-1) *$</p>
5	<p>Замена одно- и противонаправленного параллельного соединения генератора и приемника НУИ проводником (см. строки 1 и 2 табл. 2.1.8), получение элементарной схемы – узла (см. строку 1 табл. 2.1.4). Запись окончательного САВ числителя</p> <p>$\Delta N = jnR_2R_H\omega L .$</p>

Таблица 3.6.4. Нахождение знаменателя функции \underline{K}

№	Наименование операций и схемно-алгебраические выражения (САВ)
1	2
1	<p>Запись исходного САВ знаменателя согласно строке 1 табл. 2.1.1.</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> $\Delta D =$  </div>
2	<p>Выделение коэффициента трансформации (см. строку 4 табл. 2.1.13)</p> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> $\Delta D = n^2 *$  $+$ </div> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-top: 10px;"> $+ n *$  $+$ </div> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-top: 10px;"> $+ n *$  $+$ </div> <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center; margin-top: 10px;"> $+$  </div>

Окончание табл. 3.6.4

1	2
3	<p>Упрощение первого и четвертого слагаемых, содержащих схемы, делимые по одному узлу (см. строку 1 табл. 2.1.13). Второе и третье слагаемое равны нулю, поскольку после выделения сопротивлений (см. строки 2 и 4 табл. 2.1.10) и удаления проводимостей (см. строки 2 и 4 табл. 2.1.11) генератор или приемник НУИ оказываются разомкнутыми (см. строки 2 и 3 табл. 2.1.7).</p> $\Delta D = n^2 * \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \\ R_1 \\ \\ j\omega L \\ \\ R_2 \\ \\ \text{---} \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} j\omega C \\ \\ \text{---} \\ \\ R_H \\ \\ \text{---} \end{array} \right] +$ $+ \left[\begin{array}{c} \text{---} \\ \\ R_1 \\ \\ j\omega L \\ \\ R_2 \\ \\ \text{---} \end{array} \right] * \left[\begin{array}{c} j\omega C \\ \\ \text{---} \\ \\ R_H \\ \\ \text{---} \end{array} \right]$
4	<p>Повторное деление первой и четвертой производных схем по одному узлу. Запись определителей элементарных схем: уз-контур (см. строку 8 из табл. 2.1.4) и z-петли (см. строку 4 табл. 2.1.4). Выделение параметра $j\omega L$ в третьей производной схеме (см. строку 1 табл. 2.1.9). Отсюда получаем</p> $\Delta D = n^2 (R_1 j\omega L R_2 (j\omega C R_H + 1)) + (j\omega L (R_1 + R_2) + R_1 R_2) \cdot R_H.$

В результате модуль коэффициента передачи напряжения

$$K = \frac{n R_2 R_H \omega L}{\sqrt{(-n^2 R_1 \omega^2 L C R_2 R_H + R_1 R_2 R_H)^2 + [\omega L (n^2 R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_H)]^2}},$$

аргумент

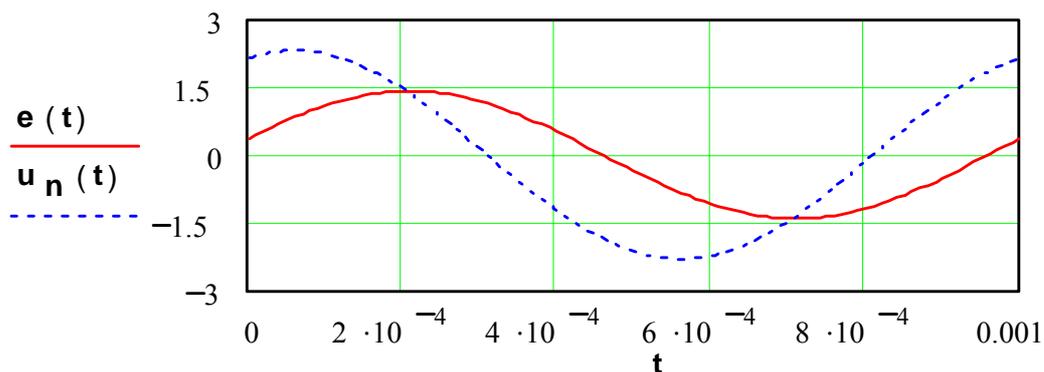
$$\varphi_K = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \left(\frac{\omega L [n^2 R_1 R_2 + (R_1 + R_2) R_H]}{(-n^2 R_1 \omega^2 L C R_2 R_H + R_1 R_2 R_H)} \right).$$

Выражения для мгновенных значений функций имеют вид:

$$e(t) = E \sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_e);$$

$$u_H(t) = E \sqrt{2} K \sin(\omega t + \varphi_e + \varphi_K).$$

При численных данных, соответствующих варианту 1 в табл. 3.6.2. ($L=L1, C=C1$) $K=1,631$ и $\varphi_K=0,933$. Графики функций $e(t)$ и $u_H(t)$ представлены на рис. 3.6.2. Масштабирование переменных выполнено в основных единицах системы СИ.

Рис. 3.6.2. Графики функций $e(t)$ и $u_n(t)$

3.7. ЦЕПИ С ОПЕРАЦИОННЫМИ УСИЛИТЕЛЯМИ

Раздел посвящен анализу линейных активных цепей, содержащих операционные усилители (ОУ).

3.7.1. Постановка задачи

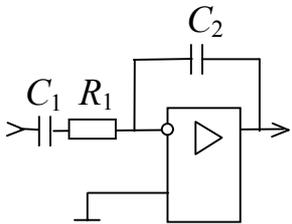
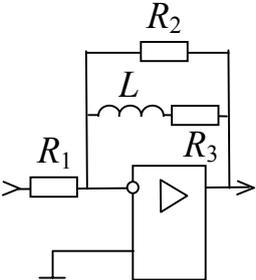
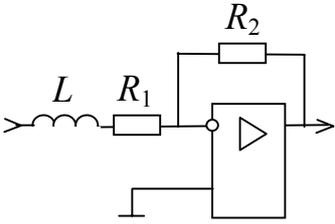
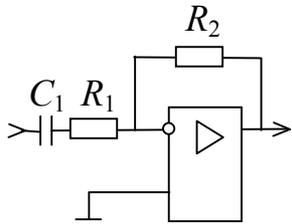
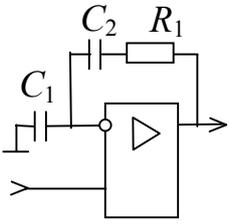
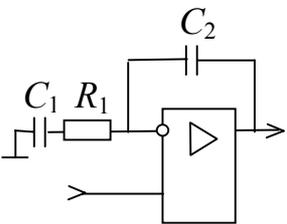
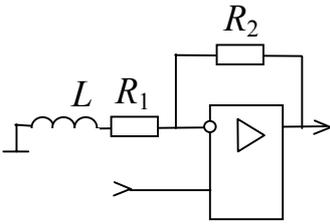
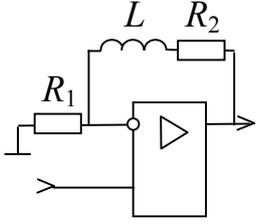
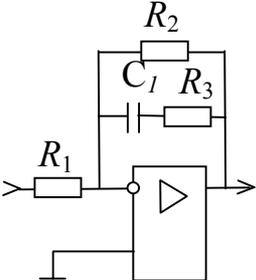
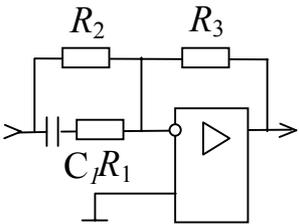
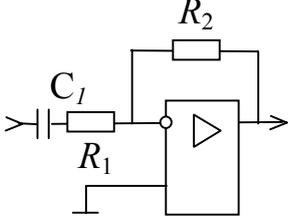
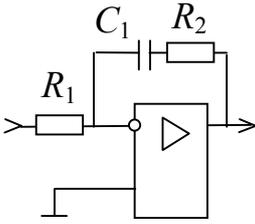
Дано:

- 1) схема цепи в соответствии с индивидуальным вариантом (табл. 3.7.1);
- 2) сопротивление нагрузки бесконечно большое;
- 3) пассивные элементы цепи – идеальные, параметры элементов заданы в табл. 3.7.2 в соответствии с групповым вариантом;
- 4) схема замещения операционного усилителя представлена на рис. 3.7.1 (см. также строки 5 и 6 табл. 2.13), где K_{oy} – коэффициент усиления ОУ; U_{21} – напряжение между зажимами 1 и 2, параметры схемы замещения помещены в табл. 3.7.2.

Требуется:

- 1) построить комплексную схему замещения заданной цепи;
- 2) сформировать в буквенной форме комплексный коэффициент передачи напряжения \underline{K} со входа цепи на выход;
- 3) построить в буквенной форме формулу для комплексного коэффициента передачи напряжения \underline{K}_{∞} при бесконечно большом коэффициенте усиления ОУ ($K_{oy} \rightarrow \infty$);
- 4) записать буквенные выражения для АЧХ $K_{\infty}(\omega)$ и ФЧХ $\varphi_{K_{\infty}}(\omega)$ коэффициента передачи напряжения цепи при $K_{oy} \rightarrow \infty$;
- 5) построить графики АЧХ $K_{\infty}(\omega)$ и ФЧХ $\varphi_{K_{\infty}}(\omega)$;
- 6) определить координаты характерных точек АЧХ и ФЧХ:
 - при постоянном воздействии $K_{\infty}(0)$, $\varphi_{K_{\infty}}(0)$;
 - при бесконечно большой частоте $K_{\infty}(\infty)$, $\varphi_{K_{\infty}}(\infty)$.

Таблица 3.7.1. Схемы цепей с ОУ

1 	2 	3 
4 	5 	6 
7 	8 	9 
10 	11 	12 

Окончание табл. 3.7.1

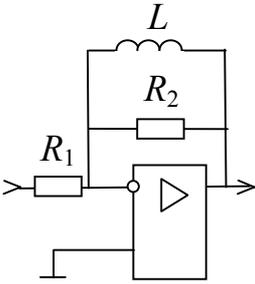
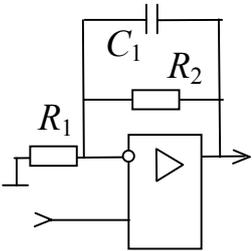
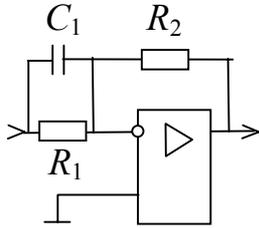
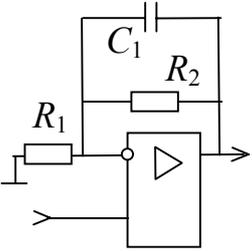
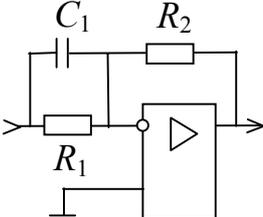
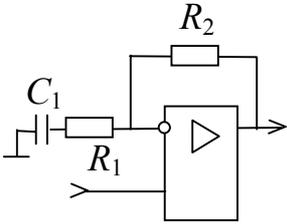
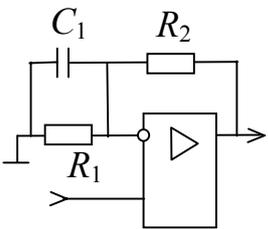
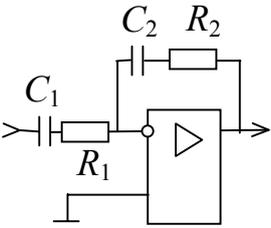
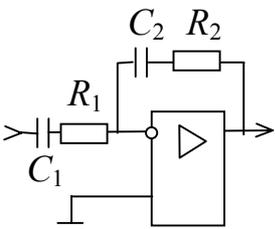
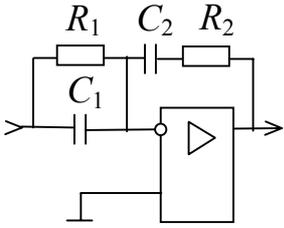
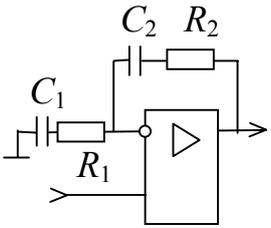
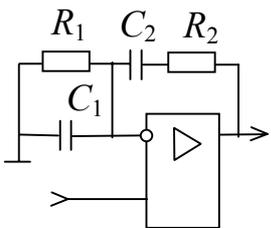
13 	14 	15 
16 	17 	18 
19 	20 	21 
22 	23 	24 

Таблица 3.7.2. Численные значения параметров элементов активных цепей

№ варианта \ Параметр	1	2	3	4	5
K_{oy}	$1 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^3$
R_1 , кОм	1,0	0,8	0,9	1,1	1,2
R_2 , кОм	1,3	1,5	1,8	1,5	2,0
R_3 , кОм	1,5	1,8	2,2	3,0	4,5
C_1 , мкФ	0,047	0,018	0,036	0,039	0,05
C_2 , мкФ	0,05	0,022	0,068	0,084	0,015
L_1 , мГн	0,1	0,15	0,2	0,18	0,08

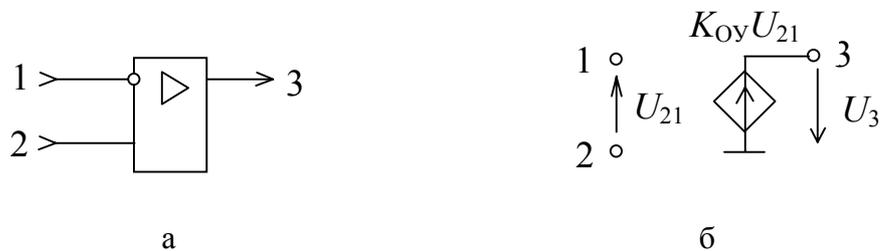


Рис. 3.7.1. Схема замещения операционного усилителя (кружком на прямоугольнике обозначен инверсный вход)

3.7.2. Пример решения задачи

Схема для примера дана на рис. 3.7.2 а. Для построения комплексной схемы замещения необходимо все напряжения и токи представить действующими или амплитудными комплексными значениями, реактивные элементы – комплексными сопротивлениями или проводимостями, операционный усилитель – схемой замещения на рис. 3.7.1. Полученная схема замещения дана на рис. 3.7.2 б, где $Z_2 = R_2 + j(\omega L - 1/\omega C)$.

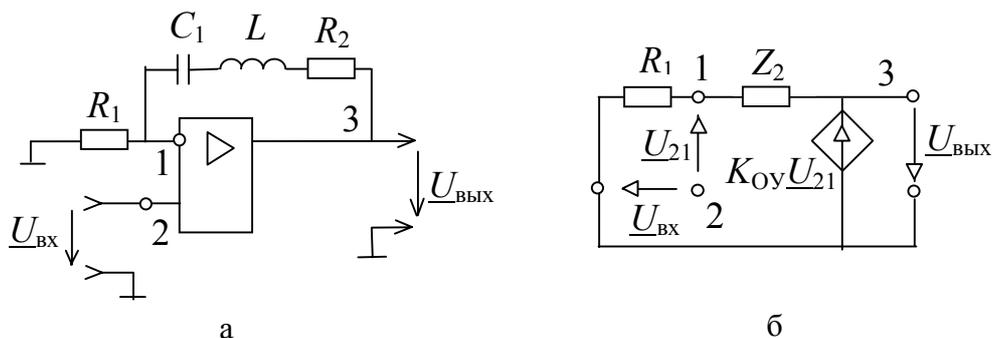


Рис. 3.7.2. Схема для примера: а – исходная; б – комплексная

Операции формирования числителя и знаменателя комплексного коэффициента передачи напряжения \underline{K} сведены в табл. 3.7.3 и табл. 3.7.4 соответственно.

Таблица 3.7.3. Формирование числителя коэффициента K активной цепи

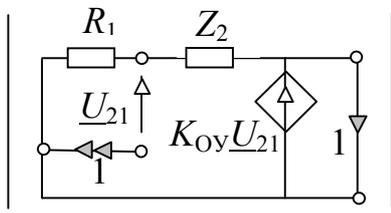
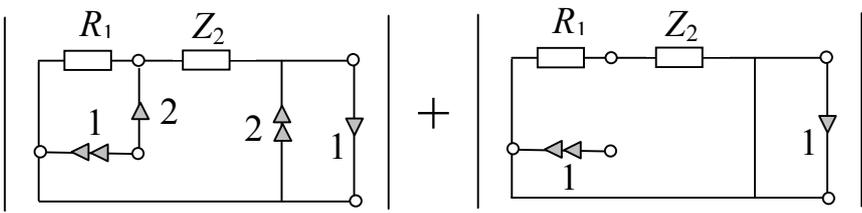
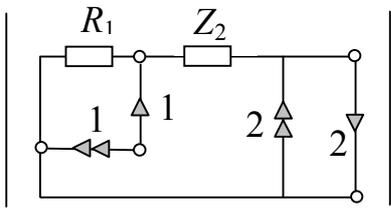
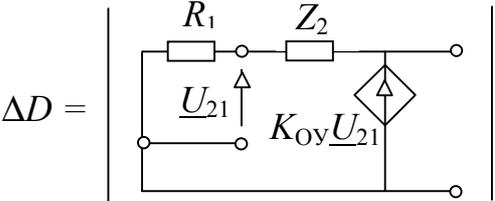
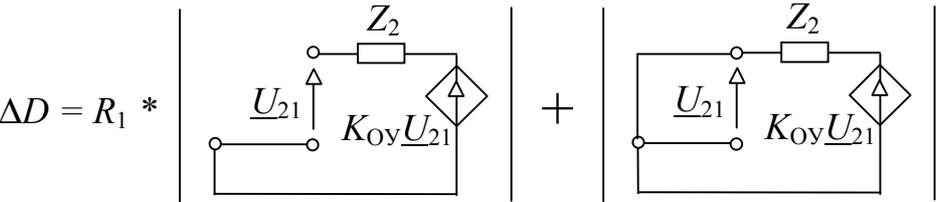
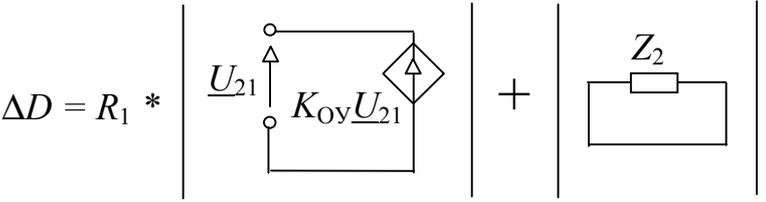
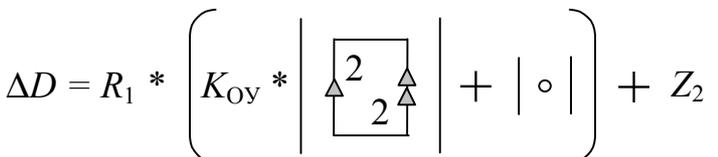
№	Наименование операций и схемно-алгебраические выражения (САВ)
1	<p>Построение исходного САВ согласно строке 1 табл. 2.1.1</p> $\Delta N = \left \begin{array}{c} R_1 \quad Z_2 \\ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} U_{21} \uparrow \\ K_{Oy} U_{21} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \end{array} \right $ 
2	<p>Выделение K_{Oy} в соответствии со строкой 4 табл. 2.1.9</p> $\Delta N = K_{Oy} * \left \begin{array}{c} R_1 \quad Z_2 \\ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \uparrow 2 \\ 2 \uparrow 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \end{array} \right + \left \begin{array}{c} R_1 \quad Z_2 \\ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \end{array} \right $ 
3	<p>В первом слагаемом взаимная замена номеров у приемников НУИ согласно строке 6 табл. 2.1.8 и установление вырожденности схемы второго слагаемого (см. строку 2 табл. 2.1.7).</p> $\Delta N = -K_{Oy} * \left \begin{array}{c} R_1 \quad Z_2 \\ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \uparrow 1 \\ 2 \uparrow 2 \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 1 \end{array} \end{array} \right $ 
4	<p>Преобразование последовательного и параллельного соединений одноименных генератора и приемника НУИ (см. строки 2 и 3 табл. 2.1.8). Нахождение определителя контура из сопротивлений R_1 и Z_2 в соответствии со строкой 6 табл. 2.1.4. Запись окончательного алгебраического выражения</p> $\Delta N = K_{Oy} (R_1 + Z_2).$

Таблица 3.7.4. Формирование знаменателя коэффициента K активной цепи

№	Наименование операций и схемно-алгебраические выражения (САВ)
1	<p>Построение исходного САВ согласно строке 1 табл. 2.1.1</p>  $\Delta D = \left \begin{array}{c} R_1 \quad Z_2 \\ \begin{array}{c} \uparrow U_{21} \\ K_{Oy} U_{21} \end{array} \end{array} \right $
2	<p>Выделение R_1 в соответствии со строкой 1 табл. 2.1.9</p>  $\Delta D = R_1 * \left \begin{array}{c} Z_2 \\ \begin{array}{c} \uparrow U_{21} \\ K_{Oy} U_{21} \end{array} \end{array} \right + \left \begin{array}{c} Z_2 \\ \begin{array}{c} \uparrow U_{21} \\ K_{Oy} U_{21} \end{array} \end{array} \right $
3	<p>Упрощение первого слагаемого путем стягивания Z_2 (см. строку 7 табл. 2.1.11). Нейтрализация ИНУН, приемник которого замкнут накоротко (см. строку 6 табл. 2.1.5).</p>  $\Delta D = R_1 * \left \begin{array}{c} \begin{array}{c} \uparrow U_{21} \\ K_{Oy} U_{21} \end{array} \\ Z_2 \end{array} \right + \left \begin{array}{c} Z_2 \end{array} \right $
4	<p>Выделение параметра K_{Oy} в первом слагаемом (см. строку 4 табл. 2.1.9). Запись определителя z-петли согласно строке 4 табл. 2.1.4.</p>  $\Delta D = R_1 * \left(K_{Oy} * \left \begin{array}{c} \uparrow 2 \\ \uparrow 2 \end{array} \right + \left \begin{array}{c} \circ \end{array} \right \right) + Z_2$
5	<p>Записывая определитель однонаправленного параллельного соединения генератора и приемника НУИ (см. строку 1 табл. 2.1.8) и определитель простейшей схемы-узла (см. строку 1 табл. 2.1.4), получаем окончательное выражение</p> $\Delta D = R_1 (K_{Oy} + 1) + Z_2.$

Таким образом,

$$\underline{K} = \frac{K_{Oy}(R_1 + Z_2)}{R_1(K_{Oy} + 1) + Z_2} \quad (3.7.1)$$

Формула коэффициента \underline{K}_∞ для схемы с идеальным ОУ может быть найдена путем предельного перехода при $K_{Oy} \rightarrow \infty$ из (3.7.1). Избежать избыточных выкладок можно, если на исходной схеме рис. 3.7.2 а заменить ОУ на НУИ в соответствии со строкой 6 табл. 2.1.13. Полученная схема представлена на рис. 3.7.3.

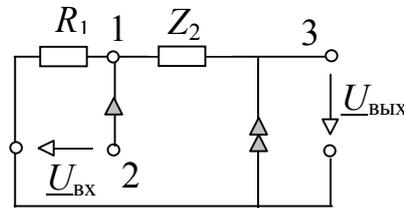


Рис. 3.7.3. Комплексная схема замещения с идеальным ОУ

Коэффициент передачи напряжения схемы рис. 3.7.3

$$\underline{K}_\infty = \frac{\left| \begin{array}{c} R_1 \quad Z_2 \\ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \\ \text{---} \text{---} \end{array} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{c} R_1 \quad Z_2 \\ \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \quad 2 \end{array} \end{array} \right|} \quad (3.7.2)$$

Перенумеруем в числителе (3.7.2) генераторы НУИ в соответствии со строкой 5 табл. 2.1.8. Преобразуем последовательное встречное и параллельное однонаправленное соединения одноименных генераторов и приемников НУИ (см. строки 3 и 2 табл. 2.1.8).

В знаменателе стянем Z_2 (см. строку 6 табл. 2.1.11), заменим проводником параллельное согласное соединение одноименных приемника и генератора НУИ (см. строку 1 табл. 2.1.8).

Таким образом, в числителе и знаменателе получаем z -петли R_1+Z_2 и R_1 соответственно (см. строку 4 табл. 2.1.4). Окончательное выражение имеет вид

$$\underline{K}_\infty = (R_1+Z_2)/R_1. \quad (3.7.3)$$

Запишем амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) коэффициента передачи напряжения

$$|\underline{K}_\infty| = E_2 \cdot \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2} / R_1.$$

Фазо-частотная характеристика (ФЧХ) находится как аргумент комплексного выражения (3.7.3), то есть

$$\varphi_{K_\infty} = \arctg[(\omega L - 1/\omega C)/(R_1 + R_2)].$$

Графики АЧХ и ФЧХ при $R_1=200$ Ом, $R_2=10$ Ом, $L=10$ мГн, $C=0,047$ мкФ представлены на рис. 3.7.4, где фаза измеряется в радианах, а циклическая частота – в рад/с.

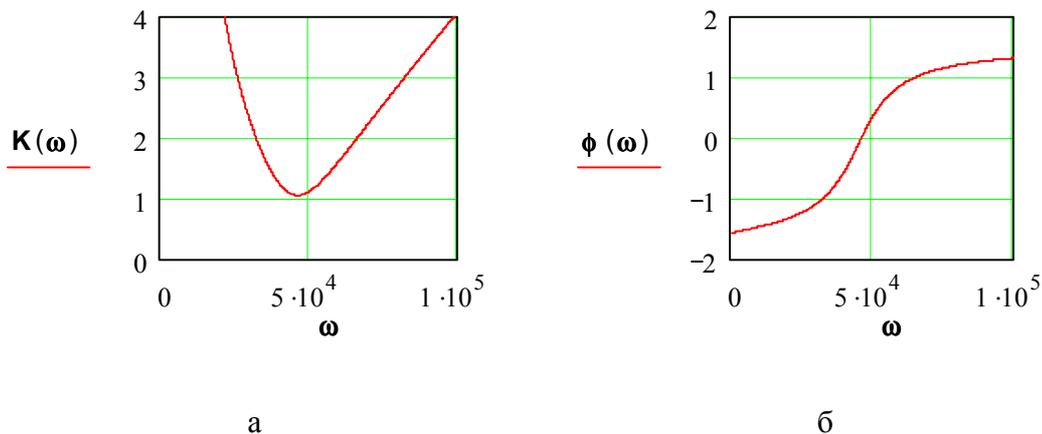


Рис. 3.7.4. АЧХ (а) и ФЧХ (б) активной схемы

Очевидно, что при $\omega=0$ модуль коэффициента передачи напряжения стремится к бесконечности, а ФЧХ принимает значение $-\pi/2$. При $\omega \rightarrow \infty$ АЧХ также стремится к бесконечности, а $\varphi_{K_\infty} = \pi/2$. Имеется также резонансная точка, в которой $K_0=R_2/R_1 + 1 = 1,05$. Резонанс имеет место, поскольку схема содержит последовательный колебательный LC -контур. В схемах из табл. 3.7.1 нет LC -контуров, однако на графиках АЧХ активных цепей с двумя конденсаторами также могут наблюдаться экстремумы [20].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотренные выше примеры, как хочется надеяться, убедили Вас в том, что метод схемных определителей является одним из эффективных методов формирования ССФ. Это действительно так, поскольку:

1) анализ схем выполняется без построения и трудоемкого решения матричных уравнений схемы;

2) направленное изменение схемы, соответствующее алгебраическим преобразованиям ее определителя, позволяет «оживить абстрактные математические процедуры, связанные с расчетом процессов в электрической цепи» [21, с. 3];

3) отказ от промежуточной математической модели в виде матрицы или графа при переходе от схемы к ее ССФ и обратно открывает новые возможности для структурного синтеза электрических цепей [22];

4) в выражениях числителей и знаменателей ССФ не используются операции деления, что облегчает преобразование ССФ к полиномиальному виду;

5) компактное и лишенное избыточности представление выражений ССФ не только сокращает затраты времени на их формирование, но и упрощает численные расчеты с помощью этих выражений;

6) метод схемных определителей через понятие минора подсхемы легко обобщается для анализа сложных электрических цепей делением их на части;

7) преимуществом символьного представления решения по сравнению с численным решением является возможность исследовать общие свойства схемных функций: условия разрешимости задачи, наличие нулей, полюсов, экстремумов, разрывов, пределов функций.

По сравнению с другими топологическими методами [8, 9] метод схемных определителей не требует применения теоретико-множественного или графового аппаратов, позволяет получить решение непосредственно по схеме без образования взаимно уничтожающихся слагаемых в выражениях ССФ. Метод схемных определителей в отличие от других методов лишен ограничений на тип используемых линейных элементов. В этом методе обеспечивается непосредственное задание всех четырех типов управляемых источников (см. табл. 2.1.9). Более того, в табл. 2.1.13 помещены схемно-алгебраические формулы для выделения параметров основных трех- и четырехполюсников, которые используются при проектировании электронных средств. Применение этих формул, а также аналогичных формул, полученных Вами самими (метод открыт для развития), исключает переход к схеме замещения, содержащей управляемые источники, что позволяет выполнять нахождение схемных функций непосредственно по принципиальной схеме.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

<p>Анализ электрических цепей при гармоническом воздействии, 101 при постоянном воздействии, 94 с взаимоиндуктивностями, 122 с идеальными трансформаторами, 130 с ИТУН, 42 с ИТУТ и ИНУН, 46 с несколькими источниками, 37 с ОУ, 137</p>	<p>Нейтрализация элементов, 15, 62, 70, 85 НУИ, 8</p>
<p>Выделение параметров взаимоиндуктивности, 74 гиратора идеального, 77 длинной линии, 78 инвертора сопротивления, 76 конвертора сопротивления, 76 НУИ, 40, 65 ОУ, 75 резистора, 20, 67 транзистора, 77 УИ, 38 элементов, 20, 67, 74 Выделение подсхем, 23, 59, 72 Выражение схемно-алгебраическое, 56 Вырождение схемы 15, 62, 64, 85</p>	<p>Объединение подсхем, 28 Операционный преобразователь, 42 усилитель (ОУ), 7, 75 Определитель матричный, 50 подсхемы, 23 символьный, 15 системный, 14 схемный (схемы) 19, 50, 59 схемы знаменателя, 33 схемы числителя, 33 схемы с двухполюсниками, 20 схемы с НУИ, 22, 65 схемы с УИ, 38</p>
<p>Генератор ЭДС, 10 тока, 10 НУИ, 19, 24</p>	<p>Преобразование схем, 58 определителей, 65 Приемник напряжения, 11 тока, 11 НУИ, 9, 24 Проводимость входная, 13 передаточная, 13</p>
<p>Двоичный вектор (ДВ), 26 Деление схем на части, 25, 72 Делитель напряжения, 33</p>	<p>Символьная схемная функция (ССФ), 7 Сопротивление входное, 13 передаточное, 13,</p>
<p>Источник независимый, 10 управляемый, 15 ИНУН, 46 ИНУТ, 16, 48 ИТУН, 16, 42 ИТУТ, 38</p>	<p>Упрощение схем, 17, 59 Уравнение характеристическое, 15</p>
<p>Контур, 10 колебательный, 114</p>	<p>Формула схемно-алгебраическая, 57, 74 Фильтр полосовой, 35 сглаживающий, 33</p>
<p>Метод схемных определителей, 7, 10, 56 Минор схемный, 24, 29, 50 Мост Уитстона, 35</p>	

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Кирхгоф Г. Р. Избранные труды.– М.: Наука, 1988.– 428 с.
2. Максвелл Д. К. Трактат об электричестве и магнетизме. В 2 т.– Т. 1.– М.: Наука. 1989.– 416 с.
3. Feussner W. Ueber Stromverzweigung in netzformigen Leitern // *Annalen der Physik.*– 1902.– Bd 9, N 13.– S. 1304-1329.
4. Feussner W. Zur Berechnung der Stromstarke in netzformigen Leitern // *Annalen der Physik.*– 1904.– Bd 15, N 12.– S. 385-394.
5. Филаретов В. В. Исследования Вильгельма Фойснера в области теоретической электротехники // *Электричество.*– 1992.– № 9.– С. 64-67.
6. Филаретов В. В. Приоритеты в науке, или еще об одном слагаемом успеха // *Электричество.*– 1994.– № 12.– С. 63-64.
7. Braun J. Topological analysis of networks containing nullators and norators // *Electronics letters.*– 1966.– Vol. 2.– N 11.– P. 427-428.
8. Hoang S. Direct topological rules for analysis of networks without magnetic coupling // *Archiwum elektrotechniki.*– 1974.– Т. 23, z. 2.– S. 387-405.
9. Теоретические основы электротехники: В 2 т. Т. 1: Основы теории линейных цепей / П. А. Ионкин, А. И. Даревский, Е. С. Кухаркин, В. Г. Миронов, Н. А. Мельников.– М.: Высшая школа, 1976.– 544 с.
10. Филаретов В. В. Топологический анализ электронных схем методом выделения параметров // *Электричество.*– 1998.– № 5.– С. 43-52.
11. Филаретов В. В. Формирование символьных функций для активных электрических цепей методом стягивания и удаления ветвей // *Электричество.*– 2001.– № 4.– С. 43-51.
12. Филаретов В. В. Метод двоичных векторов для топологического анализа электронных схем по частям // *Электричество.*– 2001.– № 8.– С. 33-42.
13. Филаретов В. В. Анализ электрических цепей методом схемных определителей: Метод. указания к практическим занятиям по электротехнике и электронике.– Ульяновск: УлГТУ, 2001.– 40 с.
14. Филаретов В. В. Схемное отображение матрицы для символьного решения систем линейных алгебраических уравнений // *Логико-алгебраические методы, модели, прикладные применения: Тр. междунар. конф.*– Ульяновск: УлГТУ, 2001.– С. 13-15.
15. Курганов С. А. Символьный подход к решению задачи диагностики электрических цепей // *Электричество.*– 2002.– № 8.– С. 49-52.
16. Нейман Л. Р., Демирчян К. С. Теоретические основы электротехники: В 2-х т.– Т. 1.– Л.: Энергоиздат. Ленингр. отд-ние, 1981.– 536 с.
17. Сигорский В. П. Анализ электронных схем.– Киев: Гос. изд-во техн. лит. УССР, 1964.– 199 с.
18. Зернов Н. В., Карпов В. Г. Теория радиотехнических цепей.– Л.: Энергия, 1972.– 816 с.

19. Матханов П. Н. Основы синтеза линейных электрических цепей.– М.: Высшая школа, 1976.– 208 с.
20. Попов В. П. Основы теории цепей.– М.: Высшая школа, 2000.– 575 с.
21. Шакиров М. А. Преобразования и диакоптика электрических цепей.– Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.– 196 с.
22. Волгин Л. И. Топологические преобразования и синтез схем радиоэлектронных средств.– Тольятти: Изд-во Поволжского технологического ин-та сервиса, 2000.– 174 с.
23. Борович З. И. Определители и матрицы.– М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988.– 184 с.
24. Чуа Л. О., Лин П. М. Машинный анализ электронных схем: Алгоритмы и вычислительные методы.– М.: Энергия, 1980.– 640 с.
25. Филаретов В. В. Оптимальная реализация дешифраторного метода анализа электрических цепей // Электричество.– 1996.– № 10.– С. 43-49.
26. Писсанецки С. Технология разреженных матриц.– Москва: Мир, 1988.– 410 с.
27. Филаретов В.В. Синтез оптимальных формул схемных функций электрических цепей // Электричество.– 1995.– № 4.– С. 36-43.
28. Бугров Я. С., Никольский С. М. Дифференциальное и интегральное исчисление.– М.: Наука, 1981.– 448 с.

Учебное издание

КУРГАНОВ Сергей Александрович
ФИЛАРЕТОВ Владимир Валентинович

**АНАЛИЗ УСТАНОВИВШИХСЯ РЕЖИМОВ
ЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ
МЕТОДОМ СХЕМНЫХ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ**

Учебное пособие

Редактор М.В.Леонова

Компьютерный набор В.В.Филаретов

Подписано в печать 11.2002. Формат 60x84/16

Бумага писчая. Усл. печ. л. 8,40. Уч.-изд. л. 7,00

Тираж 100 экз. Заказ

Ульяновский государственный технический университет
432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32

Типография УлГТУ, 432027, г. Ульяновск, ул. Сев. Венец, д. 32