

Министерство образования Российской Федерации

Северо-Западный государственный заочный технический университет

А.В. Каган

**Математическое моделирование в электромеханике**

ч.2

**ПИСЬМЕННЫЕ ЛЕКЦИИ**

Санкт-Петербург  
2002

Утверждено редакционно-издательским советом университета  
УДК 621.313

Каган А.В. Математическое моделирование в электромеханике.  
ч.2: Письменные лекции. - СПб.: СЗТУ, 2002. - с.

Рассматриваются основные методы математического моделирования индуктивных электромеханических преобразователей энергии: электрических машин переменного и постоянного тока, электромагнитных аппаратов, трансформаторов.

Письменные лекции предназначены для студентов, обучающихся по направлению подготовки специалистов 654500 - электротехника, электромеханика и электротехнологии (специальность 180100 - электромеханика) и направлению подготовки бакалавров 551300 - электротехника, электромеханика и электротехнологии.

Материал излагается в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математическое моделирование в электромеханике».

Рассмотрено на заседании кафедры электротехники и электромеханики 2002.

Одобрено методической комиссией энергетического факультета 2002.

Рецензенты: кафедра электротехники и электромеханики СЗТУ (заведующий кафедрой В.И., Рябуха, канд. техн. наук, проф.); А.Б. Каракаев, д-р техн. наук, проф. ГМА.

С Северо-Западный государственный заочный технический университет, 2002

С Каган А.В., 2002

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящее время моделирование в различных его видах является основой для проведения исследований практически во всех областях науки и техники. В электромеханике преимущественное значение имеет математическое моделирование, которое, используя современные достижения вычислительной техники, дает возможность заменить изучение сложного электромеханического преобразователя энергии относительно простой для практической реализации моделью.

Знание студентами основных методов математического моделирования применительно к задачам электромеханики необходимо для дальнейшего изучения таких дисциплин учебного плана, как «Инженерное проектирование в САПР электрических машин», «Моделирование эксплуатационных режимов работы электрических машин», «Специальный курс электрических машин» для курсового и дипломного проектирования, для профессиональной деятельности.

Дисциплина «Математическое моделирование в электромеханике» базируется на курсах высшей и вычислительной математики, информатики, предусматривает знание электротехники, основ электромеханики, электрических машин и аппаратов.

При изучении дисциплины студенты сначала должны познакомиться с общими вопросами теории подобия и моделирования применительно к электромеханическим объектам, достаточно подробно изложенным в [1]. Далее с помощью настоящего издания им необходимо изучить основные методы математического моделирования наиболее распространенного типа электромеханических преобразователей - индуктивных электрических машин и аппаратов.

# 1. МОДЕЛЬ ИДЕАЛИЗИРОВАННОГО ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ЭНЕРГИИ

В воздушном зазоре электрических машин всегда, наряду с основной гармонической вращающегося магнитного поля, присутствуют гармонические других порядков. Это обусловлено насыщением магнитопроводов, зубчатостью статора и ротора, дискретным распределением проводников вдоль длины окружности зазора и другими причинами.

Однако в большинстве практических случаев, главным образом при рассмотрении силовых общепромышленных преобразователей энергии, ограничиваются учетом только основной гармонической, пренебрегая всеми остальными, по причине их относительной малости. Таким образом, переходят к изучению некоторой идеализированной машины, характеризуемой абсолютной симметрией (электрической, магнитной и пространственной), гладкими цилиндрическими поверхностями магнитопроводов статора и ротора, магнитной проницаемостью стальных участков  $\mu = \infty$  и распределением МДС в зазоре по гармоническому закону (так называемые «синусные обмотки»).

В идеализированной машине вращающееся поле имеет круговую форму, т.е. его амплитуда постоянна, а мгновенное значение частоты вращения за период неизменно.

Модель идеализированной машины может быть получена на основе двухфазной, трехфазной или  $m$ -фазной системы обмоток [2]. Однако двухфазная модель является наиболее предпочтительной, так как в этом случае имеет место наименьшее число переменных, а следовательно, и уравнений электромеханического преобразования. Кроме того, структура последних упрощается, так как взаимоиндуктивность между взаимоперпендикулярными фазами равна нулю.

Таким образом, вместо изучения  $m$ -фазной в общем случае электрической машины можно анализировать и двухфазную эквивалентную математическую модель. При таком переходе должны соблюдаться два условия:

- преобразование должно быть инвариантным по мощности;
- токи и напряжение должны быть преобразованы без нарушения исходных уравнений.

Следует иметь в виду, что при моделировании реальной машины такое преобразование не является корректным, поскольку от числа фаз обмотки зависит гармонический состав МДС, создаваемый этой обмоткой.

Ввиду того что двухполюсная модель проще, а процессы в многополюсной машине могут быть сведены к процессам в двухполюсной машине, то обычно моделирование осуществляют при  $p=1$ .

Пространственная расчетная модель двухфазной двухполюсной идеализированной электрической машины показана на рис. 1.

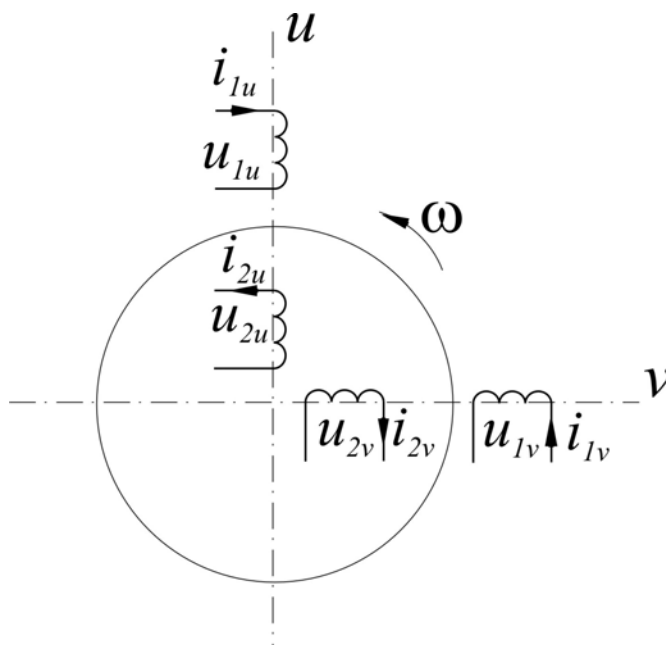


Рис.1. Пространственная модель обобщенной машины с гармонически изменяющимся полем круговой формы

Здесь статорные и роторные обмотки ориентированы в пространстве так, что их оси совпадают с некоторыми взаимоперпендикулярными осями  $u$ ,  $v$ . Ротор вращается со скоростью  $\omega$ .

Таким образом, в представленной модели оси обмотки статора и ротора взаимонеподвижны.

Такое преобразование выполняется для устранения из уравнений так называемых «периодических коэффициентов», появляющихся в математических моделях бесколлекторных вращающихся машин как результат непрерывного пространственного перемещения осей обмоток их статора и ротора. В уравнениях напряжений такие периодические коэффициенты встречаются в виде тригонометрических функций вида  $\sin\theta$  и  $\cos\theta$ . В реальной машине угол  $\theta$  между осями обмоток статора и ротора непрерывно изменяется, в связи с чем уравнения, записанные в естественных (непреобразованных) координатных осях содержат в качестве множителей токов упомянутые периодические коэффициенты и не имеют аналитического решения.

Возникновение периодических коэффициентов в непреобразованной системе координат связано с тем, что процессы в статоре и роторе описываются уравнениями, составленными в разных координатных системах.

Следовательно, возникает необходимость приведения этих процессов к некоторой общей системе осей.

Принципиально угловая скорость координатной системы может быть выбрана произвольной (система координат  $u, v$ ). Однако в практике моделирования нашли в основном применение две системы:  $\alpha, \beta$ , и  $d, q$ .

В системе координат  $\alpha, \beta$  угловая скорость  $\omega_k=0$ ; в системе координат  $d, q$  угловая скорость  $\omega_k=\omega=\omega_1$ , где  $\omega_1$  - синхронная угловая скорость.

Неподвижную систему координат  $\alpha, \beta$  применяют для исследований асинхронных машин, так как ротор у них полностью симметричен, а статор может обладать той или иной несимметрией.

Синхронные машины моделируют в основном в осях  $d, q$ , вращающихся синхронно с ротором, который обладает магнитной несимметрией - имеет явнополюсную конструкцию.

Систему осей  $u, v$  применяют при моделировании машин с вращающимся ротором и «статором».

Таким образом, при моделировании электрических машин с взаимно перемещающимися осями обмоток для исключения периодических коэффициентов из их уравнений следует осуществлять преобразование к той системе координат, которая жестко связана с несимметричным магнитопроводом.

В наиболее общем случае, когда координатная система вращается с произвольной частотой (система  $u, v$ ), математическая модель идеализированной двухфазной машины имеет вид

$$\begin{bmatrix} u_{1u} \\ u_{2u} \\ u_{2v} \\ u_{1v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1u} + \frac{d}{dt} L_{1u} & \frac{d}{dt} M & M\omega_k & L_{1v}\omega_k \\ \frac{d}{dt} M & r_{2u} + \frac{d}{dt} L_{2u} & L_{2v}(\omega_k - \omega) & M(\omega_k - \omega) \\ -M(\omega_k - \omega) & -L_{2u}(\omega_k - \omega) & r_{2v} + \frac{d}{dt} L_{2v} & \frac{d}{dt} M \\ -L_{1u}\omega_k & -M\omega_k & \frac{d}{dt} M & r_{1v} + \frac{d}{dt} L_{1v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{1u} \\ i_{2u} \\ i_{2v} \\ i_{1v} \end{bmatrix};$$

$$\frac{J}{p} \frac{d\omega}{dt} \pm m_c = pM(i_{1v}i_{2u} - i_{1u}i_{2v}),$$

где полные индуктивности обмоток статора и ротора

$$L_1 = M + l_1; \quad L_2 = M + l_2;$$

$M$  - взаимная индуктивность;

$l_1, l_2$  - индуктивность рассеяния;

$u_1, u_2, i_1, i_2$  - напряжения и токи соответствующих обмоток статора и ротора;

$r_1, r_2$  - активные сопротивления обмоток;

$J$  - момент инерции ротора и приведенный к его частоте вращения момент инерции приводного механизма;

$m_c$  - момент сопротивления на валу;

$p$  - число пар полюсов.

Уравнения напряжений записаны для эквивалентной машины с фиктивными обмотками статора и ротора, вращающимися с угловой скоростью  $\omega_k$ . Для сохранения принципа инвариантности мощности между реальной, вращающейся со скоростью  $\omega$ , и эквивалентной моделью в уравнения, помимо соответствующих так называемых трансформаторных ЭДС вида  $\frac{dL}{dt}i$ , введены ЭДС вращения вида  $L\omega$ .

Представленная модель называется обобщенной электрической машиной, так как может быть сведена к конкретным типам известных электрических машин.

Так, при  $\omega=0$  обобщенная машина превращается в статический электромагнитный преобразователь - двухобмоточный трансформатор. При этом целесообразно для упрощения уравнений принять  $\omega_k=0$  и достаточно рассматривать процессы в одной паре обмоток по любой из осей.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + \frac{d}{dt}L_1 & \frac{d}{dt}M \\ \frac{d}{dt}M & r_2 + \frac{d}{dt}L_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

Дифференциальные уравнения содержат только напряжения на первичной и вторичной обмотках, падения напряжения на активных сопротивлениях и трансформаторные ЭДС, обусловленные наличием взаимоиндуктивной связи между обмотками.

Асинхронную машину из обобщенной можно получить, если к обмоткам статора приложить двухфазную систему напряжений частоты  $f_1$ . Обмотки ротора при этом закорочены, т.е.  $u_2=0$ , а угловая скорость  $\omega \neq \omega_1$ .

Осуществляя преобразование к неподвижной системе координат  $\alpha, \beta$ , получаем математическую модель асинхронной машины с невращающимися обмотками. Для этого в уравнениях обобщенной машины положим  $\omega_k=0$ .

$$\begin{bmatrix} u_{1\alpha} \\ 0 \\ 0 \\ u_{1\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1\alpha} + \frac{d}{dt} L_{1\alpha} & \frac{d}{dt} M & 0 & 0 \\ \frac{d}{dt} M & r_{2\alpha} + \frac{d}{dt} L_{2\alpha} & -L_{2\beta}\omega & -M\omega \\ M\omega & L_{2\alpha}\omega & r_{2\beta} + \frac{d}{dt} L_{2\beta} & \frac{d}{dt} M \\ 0 & 0 & \frac{d}{dt} M & r_{1\beta} + \frac{d}{dt} L_{1\beta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{1\alpha} \\ i_{2\alpha} \\ i_{2\beta} \\ i_{1\beta} \end{bmatrix}.$$

Теперь получим математическую модель синхронной машины, приложив к обмоткам статора переменное напряжение, к одной из обмоток ротора - постоянное, а вторую обмотку закоротив. Переходя к системе осей  $d, q$ , вращающейся с угловой скоростью  $\omega_k=\omega_1$  и учитывая, что в синхронной машине  $\omega=\omega_1$ , получаем

$$\begin{bmatrix} u_{1d} \\ u_{2d} \\ 0 \\ u_{1q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1d} + \frac{d}{dt} L_{1d} & \frac{d}{dt} M & M\omega & L_{1q}\omega \\ \frac{d}{dt} M & r_{2d} + \frac{d}{dt} L_{2d} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r_{2q} + \frac{d}{dt} L_{2q} & \frac{d}{dt} M \\ -L_{1d}\omega & -M\omega & \frac{d}{dt} M & r_{1q} + \frac{d}{dt} L_{1q} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{1d} \\ i_{2d} \\ i_{2q} \\ i_{1q} \end{bmatrix}.$$

Для записи уравнений синхронной машины через потокосцепления произведем над последним матричным уравнением необходимые преобразования:



$$\begin{aligned}
u_{1d} &= (r_{1d} + \frac{d}{dt} L_{1d}) i_{1d} + \frac{d}{dt} M i_{2d} + M \omega i_{2q} + L_{1q} \omega i_{1q} = \\
&= r_{1d} i_{1d} + \frac{d}{dt} (L_{1d} i_{1d} + M i_{2d}) + \omega (L_{1q} i_{1q} + M i_{2q}) = \\
&= r_{1d} i_{1d} + \frac{d}{dt} \Psi_{1d} + \omega \Psi_{1q};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{1q} &= -L_{1d} \omega i_{1d} - M \omega i_{2d} + \frac{d}{dt} M i_{2q} + (r_{1q} + \frac{d}{dt} L_{1q}) i_{1q} = \\
&= r_{1q} i_{1q} + \frac{d}{dt} (L_{1q} i_{1q} + M i_{2q}) - \omega (L_{1d} i_{1d} + M i_{2d}) = \\
&= r_{1q} i_{1q} + \frac{d}{dt} \Psi_{1q} - \omega \Psi_{1d};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{2d} &= \frac{d}{dt} M i_{1d} + (r_{2d} + \frac{d}{dt} L_{2d}) i_{2d} = \\
&= r_{2d} i_{2d} + \frac{d}{dt} (L_{2d} i_{2d} + M i_{1d}) = \\
&= r_{2d} i_{2d} + \frac{d}{dt} \Psi_{2d};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= (r_{2q} + \frac{d}{dt} L_{2q}) i_{2q} + \frac{d}{dt} M i_{1q} = \\
&= r_{2q} i_{2q} + \frac{d}{dt} (L_{2q} i_{2q} + M i_{1q}) \\
&= r_{2q} i_{2q} + \frac{d}{dt} \Psi_{2q}.
\end{aligned}$$

Полученная система уравнений, известная как *уравнения Парка-Горева*, применяется для моделирования как переходных, так и установившихся процессов синхронных явнополюсных машин.

В машинах постоянного тока в обмотке якоря протекает многофазный переменный ток ( $f \neq 0$ ), преобразованный коллектором - механическим преобразователем частоты из постоянного тока ( $f=0$ ).

Машина постоянного тока может быть получена из обобщенной машины, если постоянный ток подвести к одной из обмоток статора, а обмотки ротора питать через преобразователь частоты, приведя многофазную систему к двухфазной. При этом поле якоря будет вращаться в направлении, противоположном направлению вращения

самого якоря. Так как здесь также выполняется равенство  $\omega = \omega_1$ , то поле якоря неподвижно относительно обмотки возбуждения.

Вращающийся механический преобразователь частоты может быть заменен статическим преобразователем частоты на полупроводниковых или каких-либо других элементах. При этом принцип электромеханического преобразования не изменится.

Модель коллекторной машины переменного тока отличается от описанной модели машины лишь тем, что обмотки статора и ротора запитываются переменным током, а преобразователь частоты преобразовывает переменный ток частоты сети  $f_1$  в переменный ток частоты скольжения  $sf_1$ .

Математическая модель обобщенной машины имеет то обоснование, что процесс электромеханического преобразования энергии во всех электрических машинах независимо от их типа протекает принципиально одинаково.

Математическая модель содержит 5 независимых переменных (напряжения  $u_{1u}, u_{2u}, u_{1v}, u_{2v}$  и момент сопротивления на валу машины  $m_c$ ), 5 зависимых переменных (токи  $i_{1u}, i_{2u}, i_{1v}, i_{2v}$  и угловая скорость  $\omega$ ), а также коэффициенты перед зависимыми переменными (активные сопротивления, индуктивности, взаимные индуктивности и момент инерции  $J$ ), называемые параметрами. В зависимости от формы записи уравнений в качестве индуктивных параметров могут выступать соответствующие индуктивные сопротивления.

### Вопросы для самоконтроля

1. Что представляет из себя идеализированная электрическая машина?
2. Изобразите пространственную модель двухфазной двухполюсной идеализированной машины.
3. В чем причина появления периодических коэффициентов в уравнениях электромеханического преобразования?
4. Перечислите системы координатных осей, применяемых при моделировании электрических машин.
5. Дайте пояснения к математической модели, записанной в системе  $u, v$ .
6. Как получить модель асинхронной машины, используя модель обобщенной электрической машины?

7. Какая система уравнений получила название уравнения Парка-Горева?
8. В чем особенности математической модели машины постоянного тока?

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ МАШИНЫ С УЧЕТОМ ГАРМОНИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ПОЛЯ

При моделировании электромашин нетрадиционных исполнений, а также при проведении специальных исследований общепромышленных машин часто приходится учитывать, что в воздушном зазоре реальной машины присутствует бесконечный спектр гармонических составляющих магнитного поля.

Гармонические составляющие поля (гармоники) отличаются друг от друга амплитудами, частотами и угловыми скоростями (частотами вращения).

Гармоники делятся на временные и пространственные. Временные – гармоники, которые попали в воздушный зазор со стороны выводов машины. Под выводами обобщенной машины понимают электрические, механические и тепловые выводы [2] при представлении электромеханического преобразователя в виде шестиполюсника (рис.2).

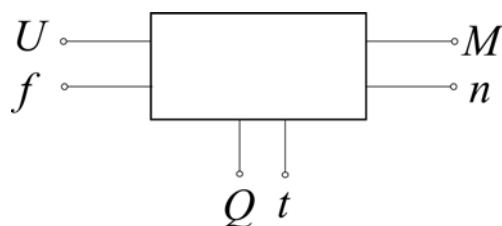


Рис.2. Электромеханический преобразователь как шестиполюсник:

$U$  – электрическое напряжение и частота его изменения  $f$ ;  
 $Q$  – теплота;  
 $t$  – температура;  
 $M$  – момент на валу;  
 $n$  – частота вращения

Временные гармоники могут попасть в воздушный зазор как со стороны электрической сети, так и со стороны вала и корпуса машины.

В установившемся двигательном режиме основной источник временных гармоник – несинусоидальное напряжение на выводах машин.

При нелинейном изменении момента нагрузки или частоты вращения в воздушном зазоре также появляются временные гармоники, которые могут «выйти» на электрический вывод и исказить напряжение сети. Максимальное значение амплитуд временных гармоник имеет

место при нагрузке двигателя, когда момент сопротивления изменяется по прямоугольному закону.

При нелинейном изменении температуры окружающей среды в воздушном зазоре также появляются временные гармоники и магнитное поле искажается.

Частоты вращения всех временных гармоник  $n_i$  равны частоте вращения первой гармоники  $n_1$ . Это обусловлено тем, что они, имея в  $i$  раз большую частоту  $f$ , образуют в  $i$  раз большее число периодов (пар полюсов  $p$ ). Так, например, для третьей временной гармоники ( $i=3$ ) имеем

$$n_3 = \frac{f_3}{p_3} = \frac{if_1}{ip_1} = \frac{3f_1}{3p_1} = n_1;$$

$$\tau_3 = \frac{\tau_1}{3},$$

где  $\tau$  - полюсное деление для соответствующей гармоники (рис.3).

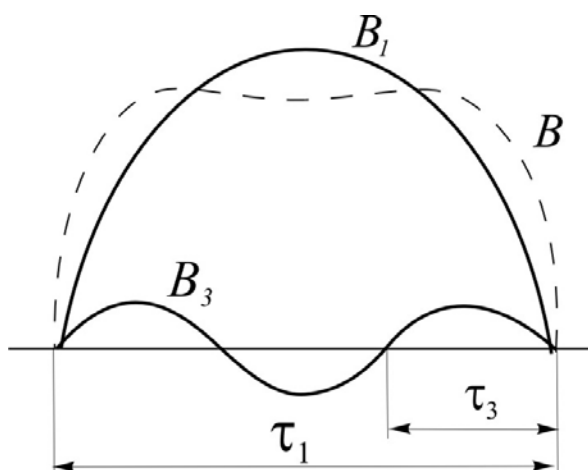


Рис.3. Разложение индукции В на временные гармоники

Пространственные гармоники часто оказывают большое влияние на энергопреобразовательный процесс в машине. Причина их появления в зазоре состоит в конструктивных особенностях электрических машин, а также в ряде случаев нелинейности их параметров.

К наиболее существенным конструктивным причинам, вызывающим отклонение закона распределения поля от синусоидального (косинусоидального), является дискретное размещение проводников обмотки в пазах машины.

Характер распределения поля в зазоре определяется законом изменения индукции в функции пространственной координаты  $x$ , отсчитываемой по длине окружности:

$$B(x) = \lambda_{\delta}(x)F(x),$$

где  $\lambda_{\delta}(x)$  - удельная магнитная проводимость воздушного зазора;  
 $F$  - МДС, создаваемые обмотками.

Аналитическое определение зависимости  $\lambda_{\delta}(x)$  затруднено из-за наличия пазов на статоре и роторе и относительного перемещения их друг относительно друга. Иногда эту зависимость определяют в виде

$$\lambda_{\delta}(x) = \lambda_{\delta 1}(x)\lambda_{\delta 2}(x),$$

где  $\lambda_{\delta 1}(x)$  - удельная магнитная проводимость при учете зубчатости только одного статора;  
 $\lambda_{\delta 2}(x)$  - аналогично для ротора.

В расчетной практике при относительно большом числе пазов статора и ротора магнитную проводимость приближенно считают не зависящей от пространственной координаты

$$\lambda_{\delta}(x) \approx \lambda_{\delta} = \frac{\mu_0}{k_n k_{\delta} \delta},$$

где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м – магнитная постоянная;  
 $k_n$  – коэффициент насыщения, учитывающий уменьшение поля под влиянием магнитного насыщения магнитопроводов машины;  
 $k_{\delta}$  - коэффициент воздушного зазора, учитывающий уменьшение поля, вследствие зубчатости сердечников.

С учетом принятого допущения в отношении  $\lambda_{\delta}(x)=const$  распределение поля в зазоре будет полностью зависеть от распределения МДС  $F(x)$ .

МДС создается обмотками – электрическими контурами, определенным образом соединенными.

Простейшим случаем обмотки является сосредоточенная обмотка в виде катушки, состоящей из одного или нескольких витков. Такая обмотка, как известно, создает МДС прямоугольной формы,

содержащей пространственные гармонические максимальной амплитуды (рис.4).

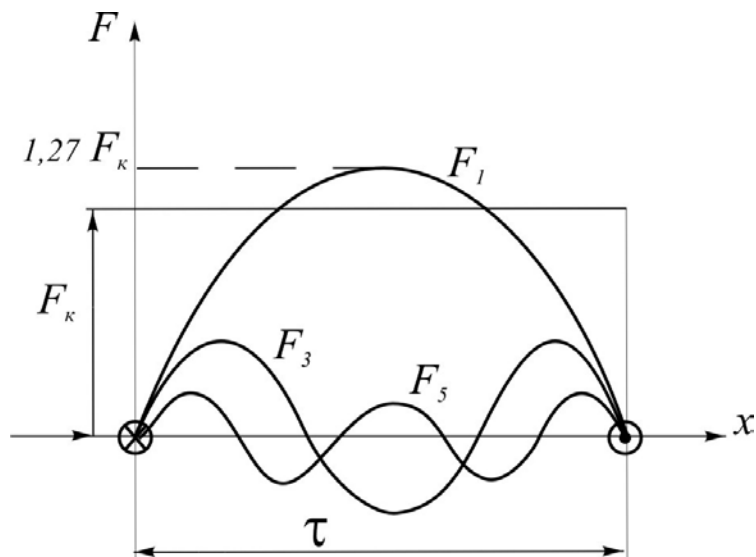


Рис.4. Разложение МДС F на пространственные гармонические

При этом распределение МДС вдоль длины окружности при диаметральном шаге ( $y = \tau$ ):

$$F(x) = \frac{4}{\pi} F_k \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots + \frac{1}{\nu} \sin \nu x \right),$$

где  $\nu$  - порядок пространственной гармонической;

$F_k$  - высота прямоугольника МДС, которая непрерывно изменяется (с изменением во времени тока)

$$F_k = \frac{iW}{2} = \frac{\sqrt{2}I \sin \omega t}{2} W;$$

$W$  - число витков;

$I$  - действующее значение тока.

Все гармонические МДС во времени изменяются по одному и тому же закону ( $\sin \omega t$ ), т.е. их частоты

$$f_1 = f_3 = f_5 = \dots = f_\nu.$$

В пространстве гармоники изменяются каждая по своему закону ( $\sin \nu x$ ), т.е. создают разное число полюсов

$$p_\nu = \nu p_1,$$

где  $p_1$  – число пар полюсов, образованных первой гармонической.

Таким образом, пространственные гармонические вращаются с разными скоростями

$$n_v = \frac{f_v}{p_v} = \frac{f_1}{vp_1} = \frac{n_1}{v}.$$

Следовательно, гармонические высокого порядка  $v > v_{осн}$ , где  $v_{осн}$  – порядок основной (рабочей) гармоники, вращаются со скоростями меньшими, чем скорость основной гармонической в  $v$  раз (*основной считается гармонической, амплитуда которой наибольшая. Остальные сопутствующие ей гармонические являются паразитными и требуют принятия специальных мер по их устранению*).

В некоторых случаях, например, в обмотках с дробным числом пазов на полюс и фазу  $q < 1$  образуются пространственные гармонические, порядок которых ниже основной гармонической ( $v < v_{осн}$ ). Такие низшие гармонические МДС вращаются со скоростями большими, чем скорость основной гармонической.

Распределенная по пазам, обмотка создает МДС ступенчатой формы (рис. 5), что позволяет существенно понизить амплитуды паразитных пространственных гармонических. Тот же эффект достигается одновременным укорочением шага обмотки.

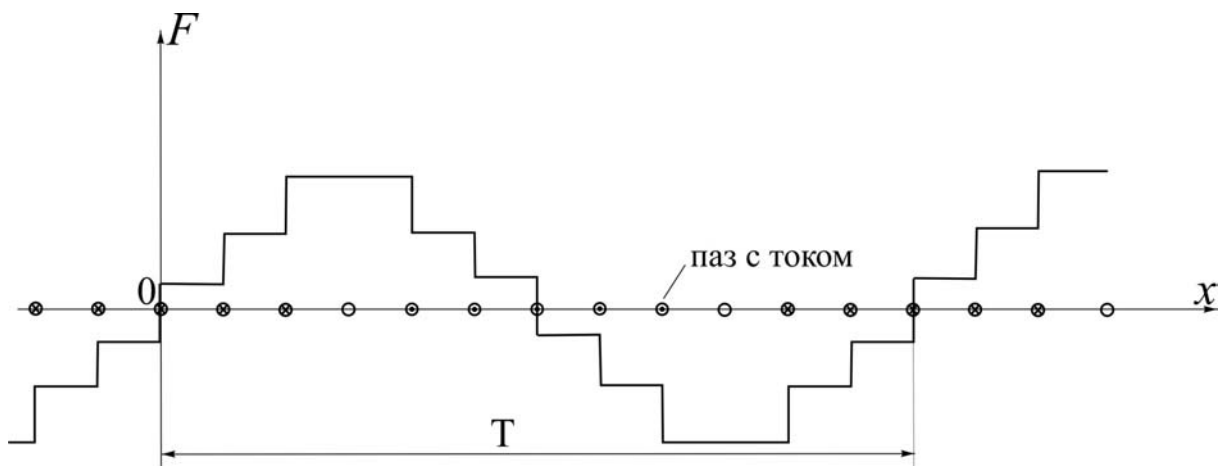


Рис.5. Кривая МДС распределенной обмотки

В общем случае закон изменения ступенчатой кривой МДС вдоль расточки статора (в направлении координаты  $x$ ) имеет вид



$$F(x) = \sum_{v=1}^{\infty} F_{vm} \sin(vx + \psi_v),$$

где  $F_{vm}$  - амплитуда  $v$ -ой гармонической МДС

$$F_{vm} = \sqrt{A_v^2 + C_v^2};$$

$x$  - пространственная координата, град (рад);

$\psi_v$  - начальная фаза  $v$ -ой гармонической

$$\psi_v = \arctg \frac{C_v}{A_v};$$

$A_v, C_v$  - коэффициенты Фурье

$$A_v = \frac{2}{T} \int_0^T F(x) \sin vxdx;$$

$$C_v = \frac{2}{T} \int_0^T F(x) \cos vxdx;$$

$T$  – пространственный период изменения МДС.

Таким образом, на основании гармонического анализа построенной кривой МДС конкретной обмотки могут быть определены амплитуды и фазы отдельных гармонических составляющих. Это позволяет создать двухполюсную математическую модель машины, содержащей в воздушном зазоре неограниченное число вращающихся с разными скоростями полей.

Каждую гармонику в модели можно создать парой обмоток, расположенных на статоре или роторе, в которых протекают токи соответствующих амплитуд и частот [2]. Таким образом, модель обобщенной машины с учетом полей от высших (низших) гармонических МДС характеризуется наличием  $m$  обмоток на статоре и  $n$  обмоток на роторе, к которым подводятся соответствующие напряжения (рис. 6).

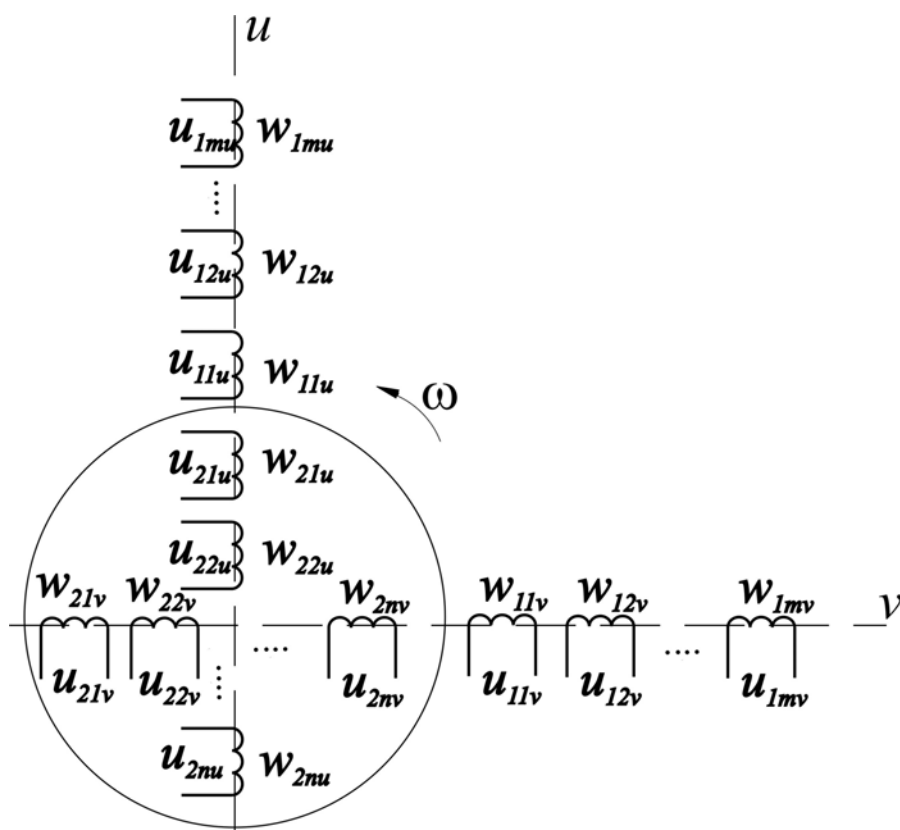


Рис.6. Пространственная модель обобщенной машины с негармонически изменяющимся полем

В расчетной модели такого электромеханического преобразователя на одной оси могут находиться обмотки как индуктивно связанные с другими обмотками, так и не имеющие с ними магнитные связи.

Математическая модель такой машины может быть представлена в виде матричных уравнений напряжений и уравнений моментов, какие записываются для обобщенной двухфазной машины с одним полем в воздушном зазоре и соответственно с двумя парами обмоток. Однако каждый элемент матрицы здесь будет представлять собой субматрицу. Так, каждое из четырех напряжений  $u_{1u}$ ,  $u_{2u}$ ,  $u_{2v}$ ,  $u_{1v}$  записывается в виде столбцовых матриц, например

$$u_{1u} = \begin{bmatrix} u_{11u} \\ u_{12u} \\ \dots \\ u_{1mu} \end{bmatrix}; \quad u_{2u} = \begin{bmatrix} u_{21u} \\ u_{22u} \\ \dots \\ u_{2nu} \end{bmatrix} \quad \text{и т.д.}$$

Аналогичную структуру имеют столбцовые матрицы токов.

В квадратную матрицу сопротивлений входят 16 субматриц, имеющих более сложную структуру.

Электромагнитный момент, входящий в уравнение движения машины, определяется всеми токами, протекающими в ее контурах.

Рассмотренная математическая модель пригодна для изучения двухфазных машин. При исследовании трехфазных машин с учетом нескольких полей в зазоре для сохранения гармонического состава результирующего поля используют аналогичную модель, составленную в трехфазной системе координат.

По сравнению с двухфазной  $m, n$ -обмоточной машиной в трехфазной  $m, n$ -обмоточной машине в полтора раза больше уравнений напряжений и токов. Значительно сильнее усложняется матрица сопротивлений и уравнения моментов.

Математическое моделирование машин, содержащих в зазоре несколько полей, целесообразно вести с применением ЭВМ.

### Вопросы для самоконтроля

1. Чем отличаются друг от друга гармонические составляющие магнитного поля?
2. Что представляют из себя временные гармоники?
3. Назовите основной источник временных гармоник.
4. В чем причина появления в воздушном зазоре пространственных гармоник?
5. Обоснуйте допущение о постоянстве удельной магнитной проводимости воздушного зазора.
6. Какую форму и почему имеет МДС сосредоточенной обмотки?
7. Запишите закон изменения МДС сосредоточенной обмотки.
8. Какие обмотки создают так называемые низшие гармоники?
9. Какую форму имеет МДС распределенной обмотки?
10. Приведите закон изменения ступенчатой кривой МДС.
11. Дайте пояснения пространственной модели машины с негармонически изменяющимся полем.
12. Что представляет из себя математическая модель машины с учетом гармонических составляющих поля?

### 3. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

#### 3.1. Границы применимости основных методов решения уравнений электрических машин

Системы дифференциальных уравнений, полученные для конкретных типов электрических машин, содержат исчерпывающую информацию о всех режимах их работ. Для извлечения этой информации дифференциальные уравнения следует решить.

Основными методами решения таких уравнений являются: аналитический, численный (с применением ЭВМ) и графо-аналитический.

Аналитическое решение уравнений электромеханического преобразования осуществляют классическим и операторным методами.

Классический метод заключается в получении точных решений, выраженных через элементарные функции, путем интегрирования. При отыскании решений требуется сначала найти общее решение уравнения, а затем определить все постоянные по начальным условиям.

Операторный метод в некоторых случаях оказывается более предпочтительным, так как позволяет сразу найти решение уравнения, отвечающее заданным начальным условиям. Его преимущества главным образом проявляются по мере усложнения уравнений.

Аналитические методы решения применяются в тех случаях, когда дифференциальные уравнения линейны и содержат постоянные коэффициенты.

Для решения нелинейных уравнений иногда применяется графо-аналитический метод, позволяющий достаточно быстро отыскать наглядные решения. Однако моделирование процессов в многообмоточных машинах в особых режимах их работы связано с необходимостью решения нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков, что может быть реализовано лишь численным методом с использованием ЭВМ.

#### 3.2. Особенности классического метода

Решение дифференциального уравнения – это отыскание функции, которая при подстановке ее и ее производных в исходное уравнение обращает уравнение в тождество.

Известно, что интеграл линейного дифференциального уравнения состоит из суммы общего и частного решений.

Общее решение получается из однородного уравнения (исходное уравнение с правой частью, равной нулю) и определяет свободную составляющую тока или напряжения.

Частное решение исходного дифференциального уравнения (уравнения с правой частью) определяет принужденную составляющую тока или напряжения.

Сумма свободной и принужденной составляющих представляет полный ток или напряжение. Следует иметь в виду, что реальным является только полный ток (напряжение), а отдельные составляющие - лишь расчетные функции.

В линейных электромеханических системах свободные составляющие токов (напряжений) затухают или нарастают по экспоненциальному закону. Это происходит потому, что их существование поддерживается энергией, запасенной в магнитном поле, которая с течением времени рассеивается.

Принужденные составляющие поддерживаются внешними источниками энергии и поэтому не затухают.

Обычно классическим методом называют такой метод, в котором решение дифференциального уравнения представляется в виде суммы свободной и принужденной составляющих. Например, для тока

$$i = i_{св} + i_{пр} ,$$

где  $i_{св}$  - свободный ток может быть представлен следующим образом [3]:

$$i_{св} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} ,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  - вещественные корни характеристического уравнения, число которых  $n$  равно порядку уравнения;

$c_1, c_2, \dots, c_n$  - постоянные интегрирования;

$i_{пр}$  - принудительный ток, например изменяющийся по гармоническому закону.

Постоянные интегрирования  $c_1, c_2, \dots, c_n$  определяются совместным решением линейных алгебраических уравнений при известных начальных условиях.

Таким образом, решение уравнений электромеханического преобразования классическим методом требует выполнения

относительно трудоемкой работы, связанной с необходимостью проведения ряда преобразований над математической моделью. Большой простотой обладает операторный метод.

### 3.3. Решение уравнений операторным методом

Операторный метод позволяет поставить в соответствие некоторой функции времени ее изображение (аналогично как комплексная величина, например, тока  $\underline{I}_m$  представляет собой изображение временной функции  $I_m \sin \omega t$ ). В результате этого возникает возможность свести решение линейных дифференциальных уравнений к решению алгебраических уравнений. При этом решение находится сразу и не требуется дополнительных вычислений постоянных.

Операторный метод основан на преобразовании Лапласа, позволяющем каждую функцию времени  $f(t)$  поставить в соответствие с функцией  $F(p)$ :

$$\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = F(p),$$

где  $p$  - оператор.

Практическое применение операторного метода в электромеханике часто базируется на преобразовании Карсона-Хевисайда, обеспечивающем сохранение размерностей при преобразовании,

$$p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = F(p).$$

Временная функция называется оригиналом, а соответствующая ей функция комплексного аргумента  $F(p)$  - изображением.

Соответствия функций записываются в виде

$$f(t) \stackrel{\bullet}{=} F(p),$$

где знак  $\stackrel{\bullet}{=}$  называется *знаком соответствия*.

Используя указанные преобразования, можно получить изображение наиболее часто встречающихся в практике функций [4]:

по Хевисайду

$$A \stackrel{\bullet}{=} A;$$

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \stackrel{\bullet}{=} p^n F(p);$$

$$\int_0^{\infty} f(t) dt \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p} F(p)$$

$$\sin \omega t \stackrel{\bullet}{=} \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2};$$

$$\sin(\omega t \pm \alpha) \stackrel{\bullet}{=} \frac{p\omega \cos \alpha \pm p^2 \sin \alpha}{p^2 + \omega^2}$$

по Лапласу

$$A \stackrel{\bullet}{=} \frac{A}{p};$$

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \stackrel{\bullet}{=} p^n F(p) - f(0),$$

где  $f(0)$  есть  $f(t)$  при  $t = 0$

$$\int_0^t f(t) dt \stackrel{\bullet}{=} \frac{1}{p} F(p)$$

$$\sin \omega t \stackrel{\bullet}{=} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2};$$

$$\sin(\omega t \pm \alpha) \stackrel{\bullet}{=} \frac{p \sin \alpha \pm \omega \cos \alpha}{p^2 + \omega^2}$$

После необходимых преобразований над операторными уравнениями и нахождения их решений осуществляют обратное преобразование изображения в оригинал. Эту операцию обычно выполняют, используя известную из математики формулу разложения.

Рассмотрим в качестве примера математическую модель двухобмоточного трансформатора, полученную из модели обобщенной машины:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + \frac{d}{dt} L_1 & \frac{d}{dt} M \\ \frac{d}{dt} M & r_2 + \frac{d}{dt} L_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix}.$$

Учитывая, что в относительных единицах индуктивности и взаимоиндуктивности равны соответствующим индуктивным сопротивлениям и заменяя  $d/dt$  оператором  $p$ , получаем

$$\begin{bmatrix} u_1(p) \\ u_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + pX_1 & pX_0 \\ pX_0 & r_2 + pX_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1(p) \\ i_2(p) \end{bmatrix},$$

где  $u_1(p)$ ,  $u_2(p)$ ,  $i_1(p)$ ,  $i_2(p)$  – изображения напряжений и токов.

Решим полученную систему операторных уравнений относительно изображений неизвестных токов.

Ее определитель

$$\Delta = (r_1 + pX_1)(r_2 + pX_2) - p^2 X_0^2.$$

Определители для нахождения изображений токов

$$\Delta_1 = (r_2 + pX_2)u_1(p) - pX_0u_2(p);$$

$$\Delta_2 = (r_1 + pX_1)u_2(p) - pX_0u_1(p).$$

Тогда изображения первичного и вторичного токов

$$i_1(p) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{(r_2 + pX_2)u_1(p) - pX_0u_2(p)}{(r_1 + pX_1)(r_2 + pX_2) - p^2 X_0^2};$$

$$i_2(p) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{(r_1 + pX_1)u_2(p) - pX_0u_1(p)}{(r_1 + pX_1)(r_2 + pX_2) - p^2 X_0^2}.$$

С помощью полученных выражений могут быть определены изображения токов для тех или иных конкретных эксплуатационных режимов работы трансформатора (включения, изменения нагрузки, короткого замыкания). Эти режимы задаются с помощью изображений независимых переменных –  $u_1(p)$  и  $u_2(p)$ , характеризующих начальные условия. После этого по известным из курса операторного исчисления формулам осуществляется обратное преобразование от изображения токов к их оригиналам.

В качестве иллюстрации смоделируем процесс внезапного короткого замыкания. Определим при этом ток первичной обмотки  $i_1$ , используя его операторное изображение  $i_1(p)$ . Для упрощения преобразования будем считать, что активные сопротивления обмоток пренебрежимо малы, что у силовых трансформаторов близко к действительности.

Тогда, с учетом, что  $u_2(p)=0$  и  $r_1=r_2=0$ , изображение первичного тока



$$i_1(p) = \frac{pX_2u_1(p)}{pX_1pX_2 - p^2X_0^2} = \frac{X_2u_1(p)}{p(X_1X_2 - X_0^2)}.$$

Пусть напряжение, приложенное к первичной обмотке, задано функцией

$$u_1 = U_m \sin(\omega t + \psi),$$

где  $\psi$  - начальный угол, характеризующий момент короткого замыкания.

Изображение этой функции согласно преобразованию Карсона-Хевисайда имеет вид

$$u_1(p) = \frac{p\omega \cos \psi + p^2 \sin \psi}{p^2 + \omega^2} U_m.$$

Поскольку процесс рассматривается при неизменной частоте приложенного напряжения  $f = f_n = \text{const}$ , то в относительных единицах  $\omega = 1$ , а напряжение  $U_m = \sqrt{2}$ .

Осуществив подстановки, получаем для изображения тока

$$\begin{aligned} i_1(p) &= \frac{X_2}{p(X_1X_2 - X_0^2)} \frac{p \cos \psi + p^2 \sin \psi}{p^2 + 1} \sqrt{2} = \\ &= \frac{1}{p(X_1 - \frac{X_0^2}{X_2})} \frac{p(\cos \psi + p \sin \psi)}{p^2 + 1} \sqrt{2} = \\ &= \frac{\cos \psi + p \sin \psi}{p^2 + 1} \frac{\sqrt{2}}{X_1 - \frac{X_0^2}{X_2}}. \end{aligned}$$

Для перехода к оригиналу тока следует применить одну из двух известных из операторного исчисления теорему разложения.

Поскольку уравнение

$$F_2(p) = p^2 + 1 = 0$$

не имеет нулевого корня, то применяем вторую теорему.

Согласно ей оригинал тока должен быть найден в виде

$$i_1(t) = \left[ \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k) e^{p_k t}}{p_k F_2'(p_k)} \right] \frac{\sqrt{2}}{X_1 - \frac{X_0^2}{X_2}},$$

где  $F_1(0), F_2(0)$  – значения полиномов  $F_1(p), F_2(p)$  при подстановке  $p=0$ ;  
 $F_1(p), F_2(p)$  – числитель и знаменатель выражения;  
 $p_k$  –  $k$ -й корень уравнения  $F_2(p)=0$ ;  
 $F_2'(p_k)$  – значение производной полинома  $F_2(p)$  при подстановке в производную  $p=p_k$ .

Отношение

$$\frac{F_1(0)}{F_2(0)} = \frac{\cos \psi + 0 \sin \psi}{0^2 + 1} = \cos \psi.$$

Корнями уравнения  $F_2(p)=p^2+1=0$  являются два корня ( $k=1,2$ ), т.е.  $n=2$ ,

$$p_{1,2} = \pm \sqrt{-1} = \pm j.$$

Первая производная полинома  $F_2(p)$

$$F_2'(p) = (p^2 + 1)' = 2p;$$

при подстановке в нее корней уравнения

$$F_2'(p_{1,2}) = \pm 2j.$$

Тогда оригинал тока короткого замыкания

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \left[ \cos \psi + \frac{(\cos \psi + j \sin \psi) e^{jt}}{j2j} + \frac{(\cos \psi - j \sin \psi) e^{-jt}}{(-j)(-2j)} \right] \frac{\sqrt{2}}{X_1 - \frac{X_0^2}{X_2}} = \\ &= \left[ \cos \psi - \frac{(\cos \psi + j \sin \psi) e^{jt}}{2} - \frac{(\cos \psi - j \sin \psi) e^{-jt}}{2} \right] \frac{\sqrt{2}}{X_1 - \frac{X_0^2}{X_2}}. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} = \cos t$ ;  $\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2} = \sin t$ , а также  $\cos t \cos \psi + \sin t \sin \psi = \cos(t + \psi)$ , окончательно получаем

$$i_1(t) = [\cos \psi - \cos(t + \psi)] \frac{\sqrt{2}}{X_1 - \frac{X_0^2}{X_2}}.$$

Из рассмотрения выражения для тока следует, что он состоит из принужденной (периодической) составляющей и свободной (апериодической) составляющей

$$i_1(t) = i_{np}(t) + i_{св}(t).$$

Переходя от относительных единиц к абсолютным для двух составляющих тока имеем

$$i_{np} = \frac{-U_m \cos(\omega t + \psi)}{X_1 - \frac{X_0^2}{X_2}};$$

$$i_{св} = \frac{U_m \cos \psi}{X_1 - \frac{X_0^2}{X_2}}.$$

Свободная составляющая тока  $i_{св}$  получена в виде постоянной величины, а не затухающей, так как активные сопротивления обмоток были приняты равными нулю.

Наибольшее значение свободный ток достигает при  $\psi = 0$ , т.е. в случае, когда короткое замыкание происходит в момент перехода напряжения  $u_1$  через нуль. Свободная составляющая тока отсутствует, если замыкание происходит в момент перехода напряжения через свое наибольшее значение ( $\psi = \pi/2$ ).

Ударное значение тока короткого замыкания достигается в момент времени  $\omega t = \pi - \psi$ :

$$i_{1y\partial} = \frac{U_m}{X_1 - \frac{X_0^2}{X_2}} + \frac{U_m \cos \psi}{X_1 - \frac{X_0^2}{X_2}} = \frac{U_m(1 + \cos \psi)}{X_1 - \frac{X_0^2}{X_2}}.$$

Максимальное ударное значение тока имеет место при  $\psi=0$ .

$$i_{1y\partial(\psi=0)} = \frac{2U_m}{X_1 - \frac{X_0^2}{X_2}}.$$

Временная диаграмма токов показана на рис. 7.

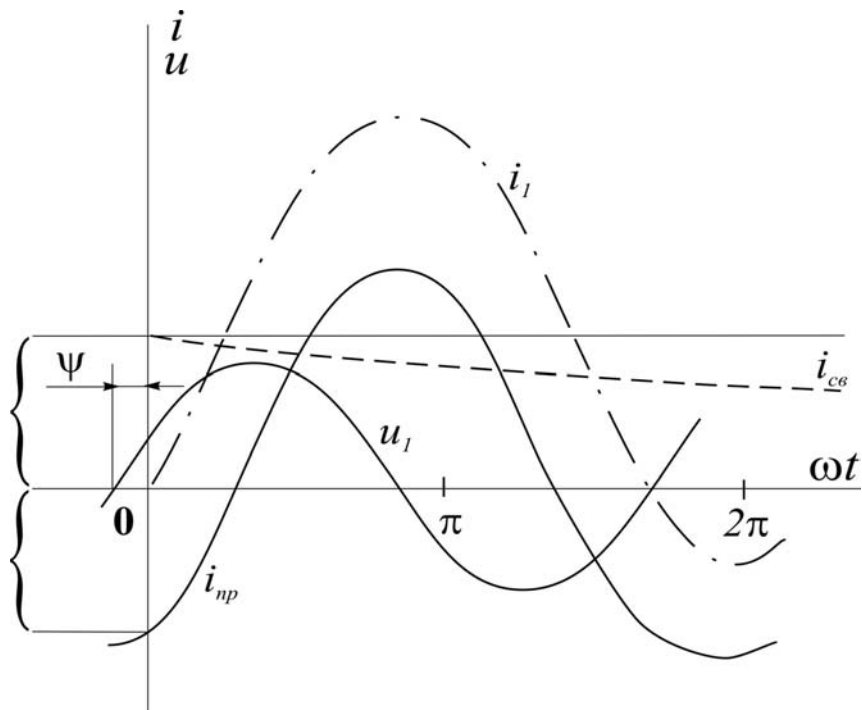


Рис.7. Диаграмма токов при коротком замыкании трансформатора

При необходимости учета влияния активного сопротивления обмоток принцип нахождения решения сохраняется. В этом случае свободный ток  $i_{св}$  будет носить затухающий характер (пунктирная кривая).

### 3.4. Методы моделирования установившихся электромагнитных процессов

Математическая модель электромеханического преобразователя, составленная в системе координат  $\alpha, \beta$ , в установившемся режиме работы

может быть получена из системы дифференциальных уравнений путем замены в них оператора дифференцирования  $d/dt$  на  $j\omega_1$ .

Так, комплексные уравнения двухобмоточного трансформатора в матричной форме записи:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_1 \\ -\underline{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + j\omega_1 L_1 & j\omega_1 M \\ j\omega_1 M & r_2 + j\omega_1 L_2 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \underline{I}_1 \\ \underline{I}_2 \end{bmatrix},$$

где знак «минус» перед напряжением вторичной обмотки указывает на то, что мощность оттуда снимается.

Перепишем систему уравнений в виде

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{I}_1 r_1 + j\omega_1 (M + l_1) \underline{I}_1 + j\omega_1 M \underline{I}_2; \\ -\underline{U}_2 &= j\omega_1 M \underline{I}_1 + \underline{I}_2 r_2 + j\omega_1 (M + l_2) \underline{I}_2, \end{aligned} \right\}$$

где  $L_1 = M + l_1,$   
 $L_2 = M + l_2.$

Преобразуем последнюю систему уравнений к виду

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{I}_1 r_1 + j\omega_1 l_1 \underline{I}_1 + j\omega_1 M (\underline{I}_1 + \underline{I}_2); \\ -\underline{U}_2 &= \underline{I}_2 r_2 + j\omega_1 l_2 \underline{I}_2 + j\omega_1 M (\underline{I}_1 + \underline{I}_2). \end{aligned} \right\}$$

Учитывая, что  $\underline{I}_1 + \underline{I}_2 = \underline{I}_0$ , а также, что

$$\omega_1 l_1 = x_1;$$

$$\omega_1 l_2 = x_2;$$

$$\omega_1 M = x_0$$

имеем окончательно

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= \underline{I}_1 r_1 + j\underline{I}_1 x_1 + jx_0 \underline{I}_0; \\ -\underline{U}_2 &= \underline{I}_2 r_2 + j\underline{I}_2 x_2 + jx_0 \underline{I}_0. \end{aligned} \right\}$$

Полученной системе уравнений соответствует известная схема замещения трансформатора (рис.8).

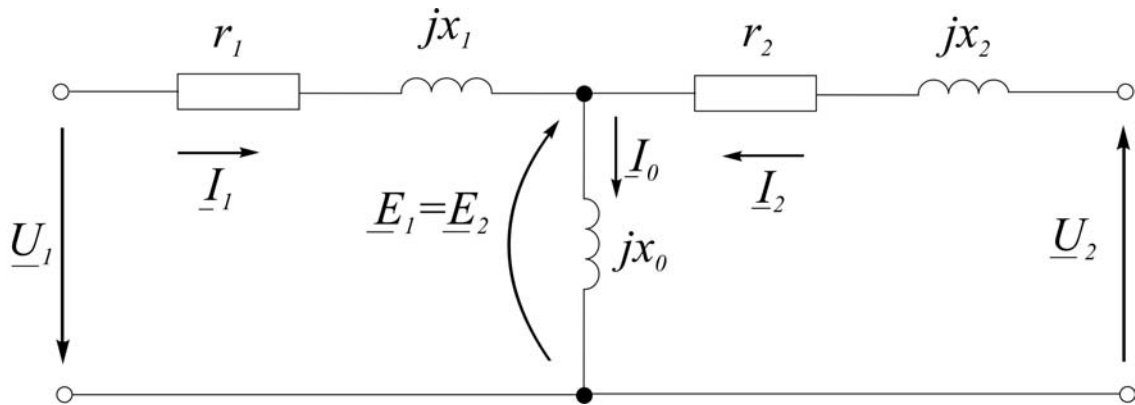


Рис.8. Схема замещения трансформатора

Она позволяет моделировать статические режимы работы трансформатора, когда  $\underline{U}_1 = \text{const}$ , а  $\underline{I}_2$  может изменяться по амплитуде и фазе, но этот процесс протекает во времени относительно медленно.

Рассмотрим теперь асинхронную машину. Для нее матричные уравнения, описывающие установившийся электромагнитный процесс, имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{1\alpha} \\ 0 \\ 0 \\ \underline{U}_{1\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{1\alpha} + j\omega_1 L_{1\alpha} & j\omega_1 M & 0 & 0 \\ j\omega_1 M & r_{2\alpha} + j\omega_1 L_{2\alpha} & -L_{2\beta}\omega & -M\omega \\ M\omega & L_{2\alpha}\omega & r_{2\beta} + j\omega_1 L_{2\beta} & j\omega_1 M \\ 0 & 0 & j\omega_1 M & r_{1\beta} + j\omega_1 L_{1\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{1\alpha} \\ \underline{I}_{2\alpha} \\ \underline{I}_{2\beta} \\ \underline{I}_{1\beta} \end{bmatrix}.$$

Представим уравнения в развернутом виде:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{1\alpha} &= r_{1\alpha} \underline{I}_{1\alpha} + j\omega_1 L_{1\alpha} \underline{I}_{1\alpha} + j\omega_1 M \underline{I}_{2\alpha}; \\ \underline{U}_{1\beta} &= r_{1\beta} \underline{I}_{1\beta} + j\omega_1 L_{1\beta} \underline{I}_{1\beta} + j\omega_1 M \underline{I}_{2\beta}; \\ 0 &= r_{2\alpha} \underline{I}_{2\alpha} + j\omega_1 L_{2\alpha} \underline{I}_{2\alpha} + j\omega_1 M \underline{I}_{1\alpha} - M\omega \underline{I}_{1\beta} - L_{2\beta}\omega \underline{I}_{2\beta}; \\ 0 &= r_{2\beta} \underline{I}_{2\beta} + j\omega_1 L_{2\beta} \underline{I}_{2\beta} + j\omega_1 M \underline{I}_{1\beta} + M\omega \underline{I}_{1\alpha} + L_{2\alpha}\omega \underline{I}_{2\alpha}. \end{aligned} \right\}$$

Рассматриваемая машина имеет две идентичные фазные обмотки, следовательно,

$$\begin{aligned} r_{1\alpha} &= r_{1\beta} = r_1, \\ r_{2\alpha} &= r_{2\beta} = r_2, \\ L_{1\alpha} &= L_{1\beta} = l_1 + M, \\ L_{2\alpha} &= L_{2\beta} = l_2 + M. \end{aligned}$$

С учетом этого получаем (осуществив переход к индуктивным сопротивлениям)

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{1\alpha} &= r_1 \underline{I}_{1\alpha} + jx_1 \underline{I}_{1\alpha} + jx_0 (\underline{I}_{1\alpha} + \underline{I}_{2\alpha}); \\ \underline{U}_{1\beta} &= r_1 \underline{I}_{1\beta} + jx_1 \underline{I}_{1\beta} + jx_0 (\underline{I}_{1\beta} + \underline{I}_{2\beta}); \\ 0 &= r_2 \underline{I}_{2\alpha} + jx_2 \underline{I}_{2\alpha} + jx_0 (\underline{I}_{1\alpha} + \underline{I}_{2\alpha}) - x_0 \underline{I}_{1\beta} \frac{\omega}{\omega_1} - (x_2 + x_0) \underline{I}_{2\beta} \frac{\omega}{\omega_1}; \\ 0 &= r_{2\beta} \underline{I}_{2\beta} + jx_2 \underline{I}_{2\beta} + jx_0 (\underline{I}_{1\beta} + \underline{I}_{2\beta}) + x_0 \underline{I}_{1\alpha} \frac{\omega}{\omega_1} + (x_2 + x_0) \underline{I}_{2\alpha} \frac{\omega}{\omega_1}. \end{aligned} \right\}$$

Преобразуем систему уравнений к виду

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{1\alpha} &= r_1 \underline{I}_{1\alpha} + jx_1 \underline{I}_{1\alpha} + jx_0 \underline{I}_{0\alpha}; \\ \underline{U}_{1\beta} &= r_1 \underline{I}_{1\beta} + jx_1 \underline{I}_{1\beta} + jx_0 \underline{I}_{0\beta}; \\ 0 &= r_2 \underline{I}_{2\alpha} + jx_2 \underline{I}_{2\alpha} + jx_0 \underline{I}_{0\alpha} - x_0 \underline{I}_{1\beta} \frac{\omega}{\omega_1} - x_2 \underline{I}_{2\beta} \frac{\omega}{\omega_1} - x_0 \underline{I}_{2\beta} \frac{\omega}{\omega_1}; \\ 0 &= r_{2\beta} \underline{I}_{2\beta} + jx_2 \underline{I}_{2\beta} + jx_0 \underline{I}_{0\beta} + x_0 \underline{I}_{1\alpha} \frac{\omega}{\omega_1} + x_2 \underline{I}_{2\alpha} \frac{\omega}{\omega_1} + x_0 \underline{I}_{2\alpha} \frac{\omega}{\omega_1}, \end{aligned} \right\},$$

где  $\underline{I}_{0\alpha} = \underline{I}_{1\alpha} + \underline{I}_{2\alpha};$   
 $\underline{I}_{0\beta} = \underline{I}_{1\beta} + \underline{I}_{2\beta}.$

Переписываем систему из четырех уравнений, произведя группировку членов уравнений для роторных цепей,

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{1\alpha} &= r_1 \underline{I}_{1\alpha} + jx_1 \underline{I}_{1\alpha} + jx_0 \underline{I}_{0\alpha}; \\ \underline{U}_{1\beta} &= r_1 \underline{I}_{1\beta} + jx_1 \underline{I}_{1\beta} + jx_0 \underline{I}_{0\beta}; \\ 0 &= r_2 \underline{I}_{2\alpha} + jx_2 \underline{I}_{2\alpha} + jx_0 \underline{I}_{0\alpha} - x_0 \underline{I}_{0\beta} \frac{\omega}{\omega_1} - x_2 \underline{I}_{2\beta} \frac{\omega}{\omega_1}; \\ 0 &= r_{2\beta} \underline{I}_{2\beta} + jx_2 \underline{I}_{2\beta} + jx_0 \underline{I}_{0\beta} + x_0 \underline{I}_{0\alpha} \frac{\omega}{\omega_1} + x_2 \underline{I}_{2\alpha} \frac{\omega}{\omega_1}. \end{aligned} \right\}$$

Умножив члены 2-го и 4-го уравнения на  $j$  и сложив почленно 1-е уравнение со 2-м, а 3-е с 4-м, получаем

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= r_1 \underline{I}_1 + jx_1 \underline{I}_1 + jx_0 \underline{I}_0; \\ 0 &= r_2 \underline{I}_{2\alpha} + jx_2 \underline{I}_2 + jx_0 \underline{I}_0 - jx_0 \underline{I}_0 \frac{\omega}{\omega_1} - jx_2 \underline{I}_2 \frac{\omega}{\omega_1}. \end{aligned} \right\}$$

Произведя группировку членов 2-го уравнения, записываем:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= r_1 \underline{I}_1 + jx_1 \underline{I}_1 + jx_0 \underline{I}_0; \\ 0 &= r_2 \underline{I}_{2\alpha} + jx_2 \underline{I}_2 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right) + jx_0 \underline{I}_0 \left(1 - \frac{\omega}{\omega_1}\right). \end{aligned} \right\}$$

Имея в виду, что скольжение  $s = \frac{\omega_1 - \omega}{\omega_1} = 1 - \frac{\omega}{\omega_1}$ , окончательно получаем известную математическую модель асинхронной машины в установившемся режиме:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= r_1 \underline{I}_1 + jx_1 \underline{I}_1 + jx_0 \underline{I}_0; \\ 0 &= \frac{r_2}{s} \underline{I}_{2\alpha} + jx_2 \underline{I}_2 + jx_0 \underline{I}_0, \end{aligned} \right\}$$

где  $\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ .

Этим уравнениям напряжений соответствует Т-образная схема замещения (рис.9).

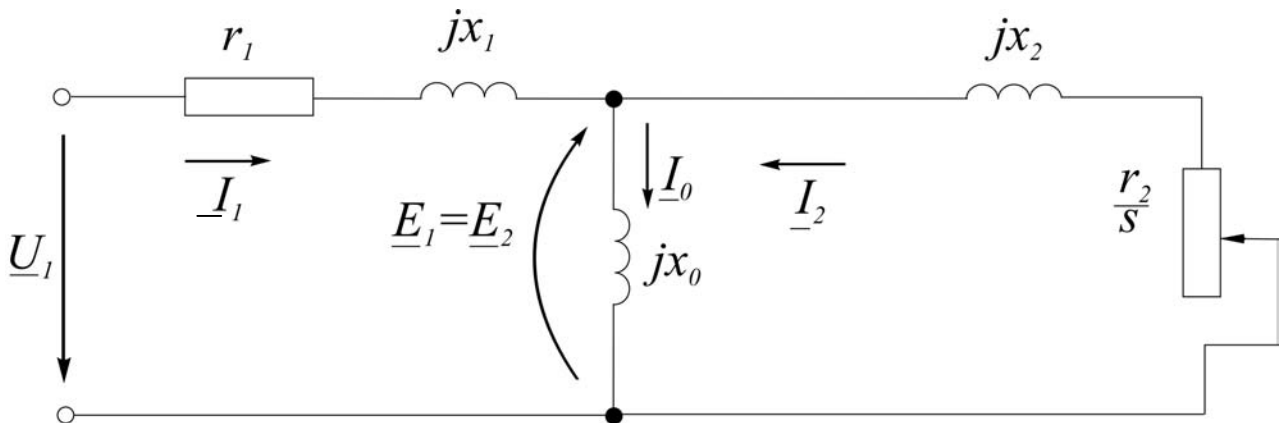


Рис.9. Т-образная схема замещения асинхронной машины

Полученная математическая модель позволяет представить основные соотношения и показатели работы асинхронной машины в установившемся режиме через параметры схемы замещения. Так, комплексное входное сопротивление

$$\underline{z} = r_1 + jx_1 + \frac{jx_0 \left(\frac{r_2}{s} + jx_2\right)}{\frac{r_2}{s} + j(x_0 + x_2)} =$$



$$\begin{aligned}
&= r_1 + \frac{\frac{r_2}{s} \left( \frac{r_2}{s} - x_2 x_0 \right) + \left( \frac{r_2}{s} x_0 + x_2 \right) (x_2 + x_0)}{\left( \frac{r_2}{s} \right)^2 + (x_2 + x_0)^2} + \\
&+ j \left[ x_1 + \frac{\frac{r_2}{s} \left( \frac{r_2}{s} x_0 + x_2 \right) - \left( \frac{r_2}{s} - x_2 x_0 \right) (x_2 + x_0)}{\left( \frac{r_2}{s} \right)^2 + (x_2 + x_0)^2} \right] = \\
&= r + jx.
\end{aligned}$$

Ток в фазе обмотки статора

$$\begin{aligned}
\underline{I}_1 &= \frac{\underline{U}_1}{\underline{z}} = \frac{\underline{U}_1}{r + jx} = \frac{\underline{U}_1 (r - jx)}{(r - jx)(r + jx)} = \frac{\underline{U}_1 r - j \underline{U}_1 x}{r^2 + x^2} = \\
&= \frac{\underline{U}_1 r}{z^2} - j \frac{\underline{U}_1 x}{z^2} = I_{1a} - j I_{1r},
\end{aligned}$$

где  $z = \sqrt{r^2 + x^2}$  - модуль комплексного сопротивления  $z$ ;  
 $I_{1a}, I_{1r}$  - активная и реактивная составляющие полного тока  $I_1$

$$I_1 = \sqrt{I_{1a}^2 + I_{1r}^2} = \frac{U_1}{z}.$$

Коэффициент мощности

$$\cos \varphi_1 = \frac{I_{1a}}{I_1} = \frac{\frac{U_1 r}{z^2}}{\frac{U_1}{z}} = \frac{r}{z}.$$

Подводимая в двигательном режиме активная мощность

$$P_1 = m U_1 I_1 \cos \varphi_1 = m U_1 \frac{U_1 r}{z z} = m r \left( \frac{U_1}{z} \right)^2,$$

где  $m$  - число фаз машины.

ЭДС, индуцируемая в обмотках машины,

$$E_1 = E_2 = I_1 z_{II} = \frac{U_1}{z} \sqrt{(r - r_1)^2 + (x - x_1)^2},$$

где  $z_{II}$  - модуль комплексного эквивалентного сопротивления двух параллельных ветвей схемы замещения.

Ток в обмотке ротора

$$I'_2 = \frac{E'_2}{z'_2} = \frac{U_1}{z} \sqrt{\frac{(r-r_1)^2 + (x-x_1)^2}{\left(\frac{r'_2}{s}\right)^2 + x'_2{}^2}},$$

где  $z'_2 = \sqrt{\left(\frac{r'_2}{s}\right)^2 + x'_2{}^2}$  - модуль комплексного сопротивления цепи ротора.

Электромагнитная мощность

$$P_{эм} = mE_2I_2 \cos \psi_2 = m \frac{E_1^2 \frac{r'_2}{s}}{\left(\frac{r'_2}{s}\right)^2 + x'_2{}^2},$$

где  $\psi_2$  - угол между  $\underline{E}_2$  и  $\underline{I}_2$ ;

$$\cos \psi_2 = \frac{\frac{r'_2}{s}}{\sqrt{\left(\frac{r'_2}{s}\right)^2 + x'_2{}^2}}.$$

Электромагнитный момент (без учета падения напряжения на сопротивлении обмотки статора)

$$M_{эм} = \frac{P_{эм}}{\omega} = \frac{P_{эм}}{2\pi f_1} \approx \frac{mp}{2\pi f_1} \frac{U_1^2 \frac{r'_2}{s}}{\left(\frac{r'_2}{s}\right)^2 + x_k^2},$$

где  $p$  - число пар полюсов машины;  
 $x_k = x_1 + x'_2$ .

Зависимость  $M_{эм} = f(S)$ , построенная по последнему выражению, имеет известный вид (рис.10).

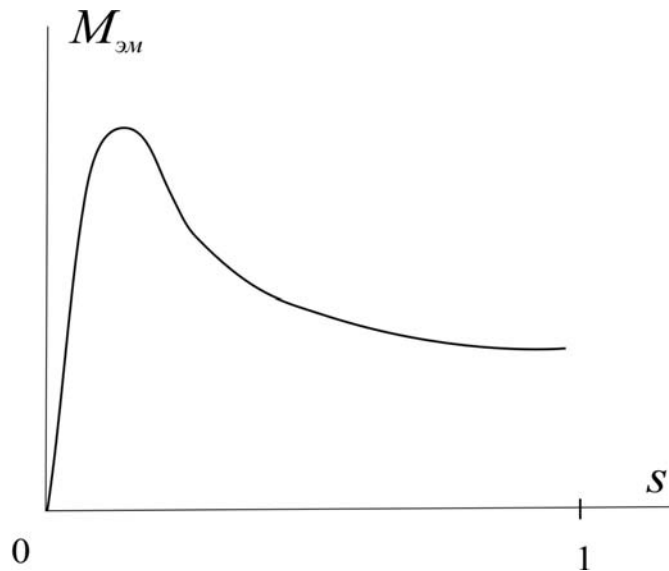


Рис.10. Механическая характеристика асинхронного двигателя

Аналогично могут быть получены выражения и для других показателей асинхронной машины, работающей в установившемся режиме.

В общем случае уравнения Парка-Горева для явнополусной синхронной машины имеют вид

$$\left. \begin{aligned} u_{1d} &= r_{1d}i_{1d} + \frac{d}{dt}\psi_{1d} + \omega\psi_{1q}; \\ u_{1q} &= r_{1q}i_{1q} + \frac{d}{dt}\psi_{1q} - \omega\psi_{1d}; \\ u_{2d} &= r_{2d}i_{2d} + \frac{d}{dt}\psi_{2d}; \\ 0 &= r_{2q}i_{2q} + \frac{d}{dt}\psi_{2q}. \end{aligned} \right\}$$

В системе координат  $d, q$  для перехода от дифференциальных уравнений электромеханического преобразования к уравнению установившегося режима следует произвести замену  $d/dt$  на  $js$ ,  $\omega$  на  $1-s$ .

Тогда, для любого установившегося режима, справедливо:

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_{1d} &= r_{1d}\underline{I}_{1d} + js\underline{\psi}_{1d} + (1-s)\underline{\psi}_{1q}; \\ \underline{U}_{1q} &= r_{1q}\underline{I}_{1q} + js\underline{\psi}_{1q} - (1-s)\underline{\psi}_{1d}; \\ \underline{U}_{2d} &= r_{2d}\underline{I}_{2d} + js\underline{\psi}_{2d}; \\ 0 &= r_{2q}\underline{I}_{2q} + js\underline{\psi}_{2q}. \end{aligned} \right\}$$

В синхронном режиме работы  $s=0$ , следовательно,

$$\left. \begin{aligned} U_{1d} &= r_{1d}I_{1d} + \Psi_{1q}; \\ U_{1q} &= r_{1q}I_{1q} - \Psi_{1d}; \\ U_{2d} &= r_{2d}I_{2d}. \end{aligned} \right\}$$

Учитывая, что в режиме синхронного вращения  $I_{2q} = 0$ , а ток  $I_{2d}$  является током возбуждения,

$$\begin{aligned} \Psi_{1q} &= x_q I_{1q} + x_{aq} I_{2q} = x_q I_{1q}; \\ \Psi_{1d} &= x_d I_{1d} + x_{ad} I_{2d} = x_d I_{1d} + x_{ad} I_f. \end{aligned}$$

Имея в виду, что  $r_{1d} = r_{1q} = r$  и переходя к общепринятым в теории синхронных машин обозначениям, получаем

$$\left. \begin{aligned} U_d &= rI_d + x_q I_q; \\ U_q &= rI_q - x_d I_d + E_f; \\ U_f &= r_f I_f, \end{aligned} \right\}$$

где ЭДС, индуцируемая потоком возбуждения в обмотке якоря,  $E_f = -x_{ad} I_f$ .

Полученным уравнениям соответствует на пространственно-временной плоскости диаграмма токов и напряжений синхронного двигателя (перевозбужденного) (рис.11).

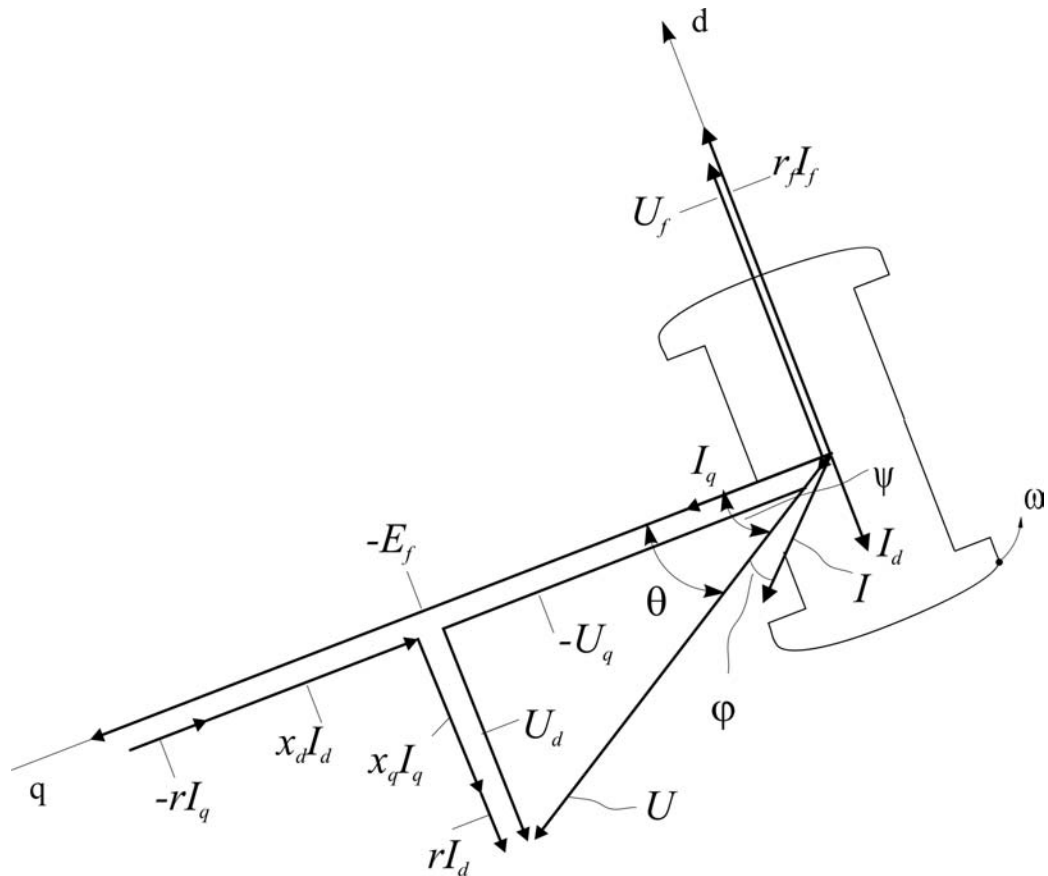


Рис.11. Диаграмма токов и напряжений синхронного двигателя

### Продольная и поперечная составляющие напряжения

$$\left. \begin{aligned} U_d &= U \sin \theta; \\ U_q &= U \cos \theta, \end{aligned} \right\}$$

где  $\theta$  - временной угол между векторами напряжения  $U$  и ЭДС -  $E_f$ .

Поскольку в машинах большой и средней мощности относительная величина активного сопротивления обмотки статора составляет  $r < 0,01$  (о.е.), то на векторной диаграмме он может быть приравнен пространственному углу между вектором ЭДС -  $E_\delta$ , наводимой в фазной обмотке результирующим магнитным потоком машины, и вектором  $-E_f$ .

Тогда система уравнений синхронной машины приобретает вид

$$\left. \begin{aligned} U \sin \theta &= rI_d + x_q I_q; \\ U \cos \theta &= rI_q - x_d I_d + E_f; \\ U_f &= r_f I_f. \end{aligned} \right\}$$

Решим уравнения относительно токов. Из первого уравнения

$$I_d = \frac{U \sin \theta - x_q I_q}{r}.$$

Подставив ток  $I_d$  во второе уравнение, имеем

$$U \cos \theta = r I_q - \frac{x_d (U \sin \theta - x_q I_q)}{r} + E_f.$$

После преобразования получаем

$$I_q = \frac{r U \cos \theta + x_d U \sin \theta - E_f r}{r^2 + x_d x_q} = \frac{x_d U \sin \theta + r (U \cos \theta - E_f)}{r^2 + x_d x_q}.$$

Подставим  $I_q$  в первое уравнение

$$I_d = \frac{-x_q (U \cos \theta - E_f) + r U \sin \theta}{r^2 + x_d x_q} = \frac{x_q (E_f - U \cos \theta) + r U \sin \theta}{r^2 + x_d x_q}.$$

Ток возбуждения

$$I_f = \frac{U_f}{r_f}.$$

Результирующий ток

$$I = \sqrt{I_d^2 + I_q^2}.$$

Угол  $\varphi$  между напряжением  $U$  и током  $I$

$$\varphi = \theta + \psi,$$

где угол между векторами  $-E$  и  $I$  может быть найден в виде

$$\psi = \operatorname{arctg}\left(-\frac{I_d}{I_q}\right) = \operatorname{arctg} \frac{x_q \left(\cos \theta - \frac{E_f}{U}\right)}{x_d \sin \theta}.$$

Получим выражение электромагнитной мощности через токи и потокосцепления:

$$\begin{aligned}
 P_{эм} &= \Psi_q I_d - \Psi_d I_q = x_q I_q I_d - (x_d I_d - E_f) I_d I_q = \\
 &= x_q \frac{U \sin \theta}{x_q} \frac{E_f - U \cos \theta}{x_d} - \left( x_d \frac{E_f - U \cos \theta}{x_d} - E_f \right) \frac{U \sin \theta}{x_q} = \\
 &= \frac{UE_f}{x_d} \sin \theta - U^2 \sin \theta \cos \theta \frac{1}{x_d} + U^2 \sin \theta \cos \theta \frac{1}{x_q} = \\
 &= \frac{UE_f}{x_d} \sin \theta + \frac{U^2}{2} \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) \sin 2\theta = \\
 &= P'_{эм} + P''_{эм},
 \end{aligned}$$

где  $\sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta$ .

Зависимость  $P_{эм} = f(\theta)$  показана на рис.12.

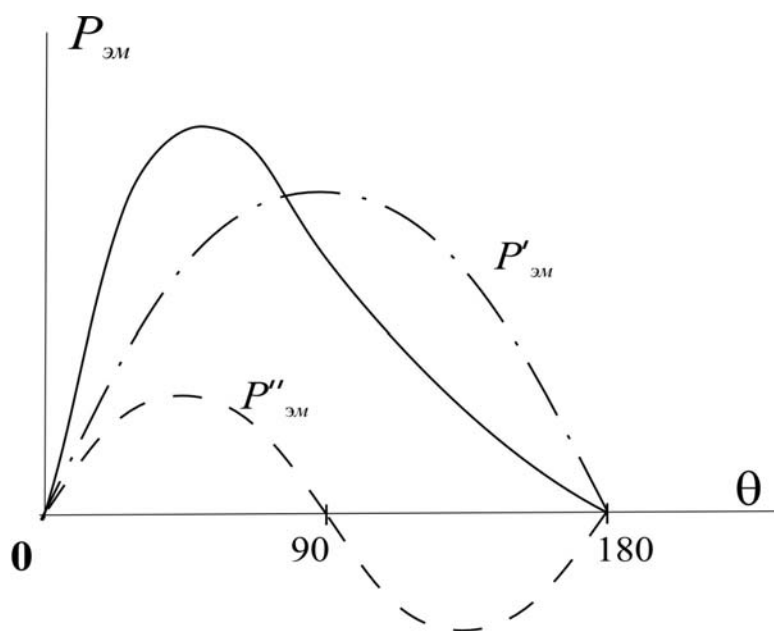


Рис.12. Угловая характеристика электромагнитной мощности

Электромагнитный момент

$$M_{эм} = \frac{UE_f}{\omega_1 x_d} \sin \theta + \frac{U^2}{2\omega_1} \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) \sin 2\theta,$$

где  $\omega_1 = 2\pi f / p = 2\pi n / 60 p = \pi n / 30$ ;  
 $n$  – частота вращения, об/мин.

В системе о.е. (при  $U = U_{ном} = U_{\delta}$ ):

$$P_{эм*} = M_{эм*} = \frac{E_f}{x_d} \sin \theta + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right) \sin 2\theta.$$

Полученная математическая модель позволяет анализировать установившийся режим синхронной машины.

Машины постоянного тока обычно выполняются с несколькими обмотками. Между обмоткой вращающегося якоря и обмоткой статора при нагрузке возникают сложные взаимодействия. Поэтому их математические модели – это уравнения многообмоточных машин.

### Вопросы для самоконтроля

1. Назовите основные методы решения дифференциальных уравнений электромеханических преобразователей.
2. Какой метод называется классическим?
3. В чем состоит сущность операторного метода?
4. Какой вид имеет преобразование Лапласа?
5. Как перейти от дифференциальных уравнений электромеханического преобразования к уравнениям установившегося режима?
6. Запишите модель установившегося режима работы трансформатора.
7. Какой вид имеет математическая модель асинхронной машины в установившемся режиме?
8. Дайте характеристику модели явнополюсной синхронной машины, работающей в установившемся режиме.



#### 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МНОГООБМОТОЧНЫХ ЭЛЕКТРОМЕХАНИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ

Большинство машин имеет несколько обмоток. Однако почти все реальные электрические машины, независимо от числа имеющихся обмоток, можно рассматривать как многообмоточные. Это связано в ряде случаев с необходимостью учета в математической модели контуров вихревых токов, возникающих в тех или иных частях таких машин, а также высших гармонических магнитного поля. Их изучение целесообразно вести с помощью  $m, n$ -обмоточной модели, реализуемой на ЭВМ.

Рассмотрим особенности создания моделей электрических машин с несколькими обмотками ( $m, n > 2$ ).

Модель асинхронной машины с двумя обмотками на статоре и четырьмя обмотками на роторе можно использовать для изучения двигателей с короткозамкнутым ротором с двойной клеткой (рис.13).

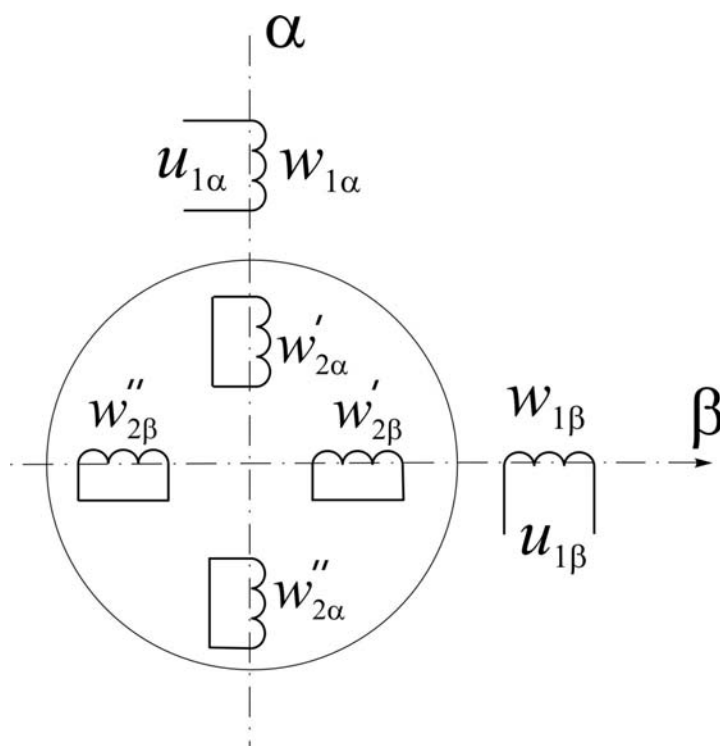


Рис.13. Пространственная модель машины с двойной клеткой:

$w_{1\alpha}, w_{1\beta}$  - двухфазная обмотка статора;

$w'_{2\alpha}, w'_{2\beta}$  - пусковая обмотка ротора, обладающая большим сопротивлением;

$w''_{2\alpha}, w''_{2\beta}$  - рабочая обмотка ротора.

В реальной машине пусковая обмотка располагается ближе к воздушному зазору и в нее происходит вытеснение пускового тока (рис. 14). Сечение ее стержней устанавливается исходя из условия  $r_2 = x_k$ , где  $x_k = x_1 + x_2$ .

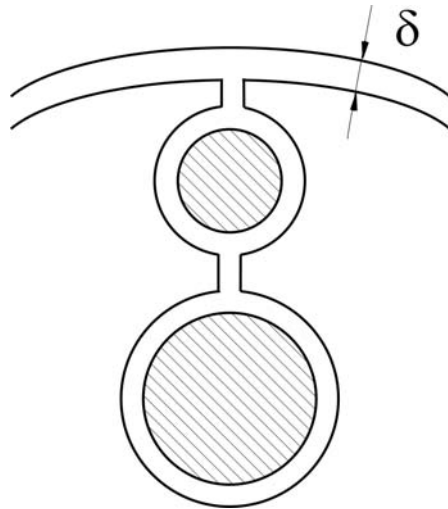


Рис.14. Паз ротора с двойной обмоткой

В рабочем режиме ток протекает практически только через рабочую обмотку большего сечения, что обеспечивает высокие энергетические показатели машины.

Для установившегося симметричного режима, когда частота вращения ротора постоянна и процессы можно рассматривать лишь для одной фазы, уравнения напряжений двухклеточного двигателя имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \underline{U}_1 &= r_1 \underline{I}_1 + jx_1 \underline{I}_1 + jx_0 \underline{I}_0; \\ 0 &= \frac{r_2}{s''} \underline{I}_2' + jx_2' \underline{I}_2' + jx_0 \underline{I}_0 + jx_2 \underline{I}_2; \\ 0 &= \frac{r_2}{s} \underline{I}_2'' + jx_2'' \underline{I}_2'' + jx_0 \underline{I}_0 + jx_2 \underline{I}_2, \end{aligned} \right\}$$

где  $\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ ;  $\underline{I}_2 = \underline{I}_2' + \underline{I}_2''$ ;  
 $x_2$  - сопротивление взаимной индукции обмоток ротора.

Приведенной математической модели соответствует схема замещения, представленная на рис.15.

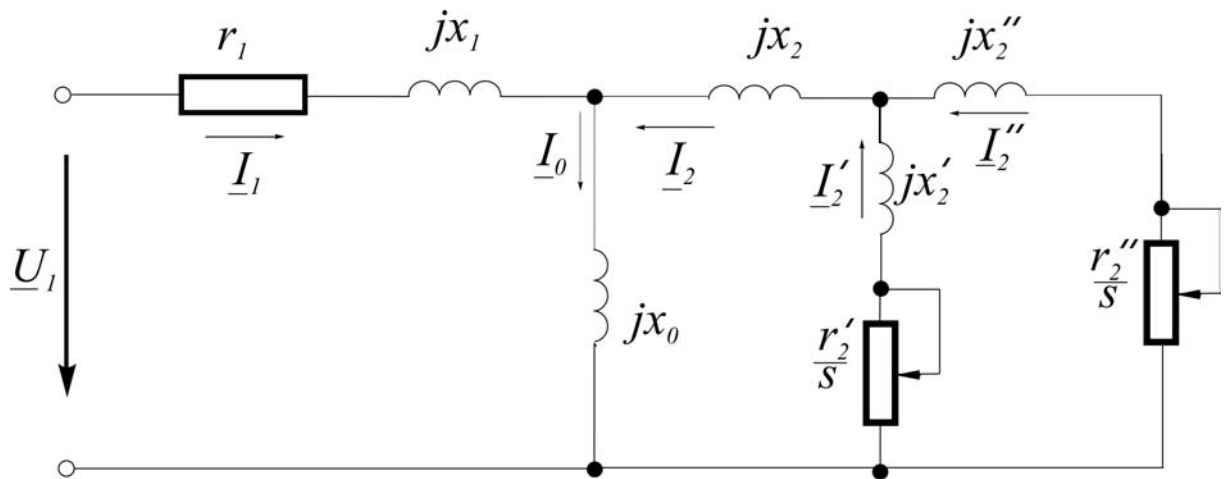


Рис. 15. Схема замещения двигателя с двойной клеткой

Развиваемый двухклеточным двигателем электромагнитный момент имеет две составляющие, обусловленные токами в обеих обмотках,

$$M_{эм} = M_{эм}' + M_{эм}'' ,$$

где

$$M_{эм}' \approx \frac{U_1^2 \frac{r_2'}{s}}{\left(\frac{r_2'}{s}\right)^2 + x_k^2} ;$$

$$M_{эм}'' \approx \frac{U_1^2 \frac{r_2''}{s}}{\left(\frac{r_2''}{s}\right)^2 + x_k^2} .$$

Механическая характеристика такого двигателя показана на рис.16.

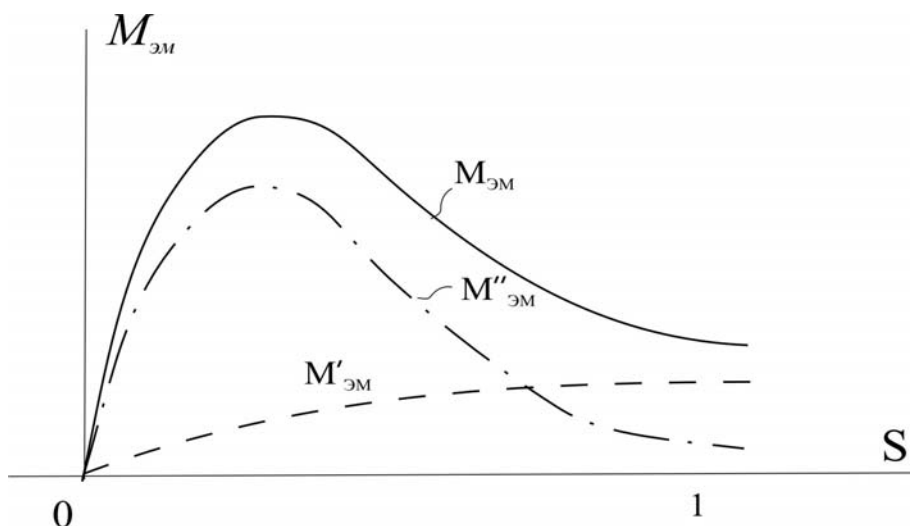


Рис.16. Механическая характеристика двигателя с двойной клеткой

Учет в модели нескольких контуров на роторе позволяет рассмотреть все возможное многообразие механических характеристик различных асинхронных машин. Так, в частном случае, при отсутствии на роторе обмоток (массивный ротор), механическая характеристика имеет максимум в области больших скольжений  $r_2 / x_k \gg 1$  (кривая 1, рис.17). Этот момент обусловлен действием вихревых токов в магнитопроводе ротора.

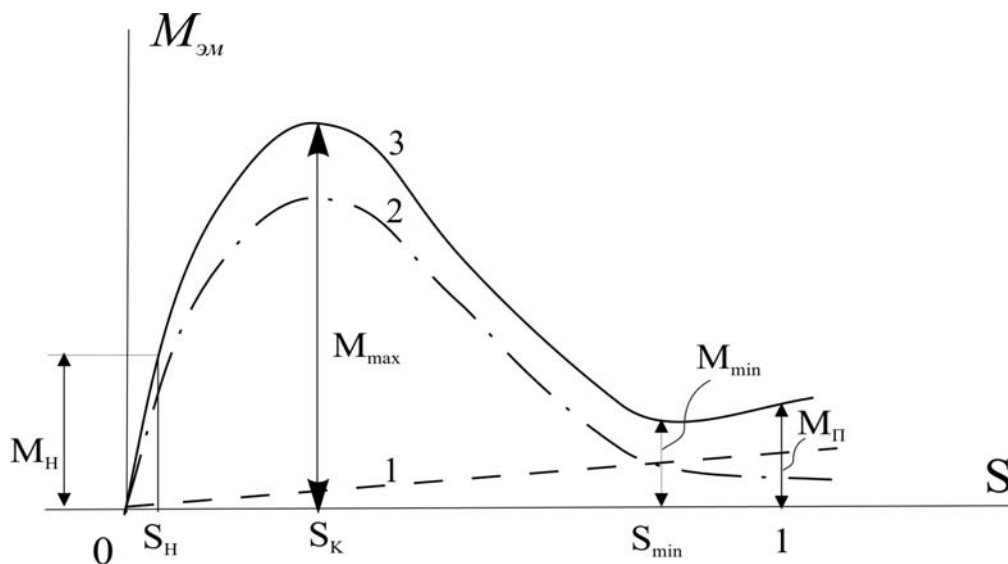


Рис.17. Механическая характеристика с учетом действия вихревых токов

Если теперь ротор двигателя снабдить короткозамкнутой обмоткой, то его характеристика будет иметь вид кривой 3 за счет появления составляющей 2.

Анализ двухобмоточной модели ротора дает возможность перейти от рассмотрения идеальной асинхронной машины с характеристикой 2 к реальной машине с характеристикой 3. Это позволяет учесть провал в характеристике в области скольжений  $S \approx S_{\min}$ , который обусловлен влиянием вихревых токов. Последние повышают пусковой момент, а при  $S < 1$  проявляются уже слабее.

Аналогичным образом, за счет введения дополнительных контуров в модель машины, осуществляется учет влияния высших гармонических магнитного поля на характеристики асинхронного двигателя.

Машины постоянного тока также являются многообмоточными электромеханическими преобразователями. Пространственная модель, составленная в системе координат  $d, q$ , в общем случае показана на рис.18.

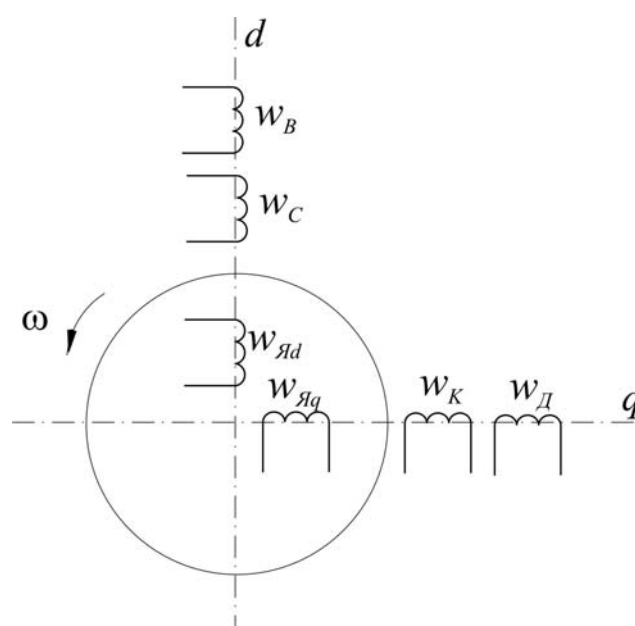


Рис.18. Пространственная модель двигателя постоянного тока:

- $w_{Яd}, w_{Яq}$  - двухфазный эквивалент многофазной якорной обмотки;
- $w_B$  - обмотка независимого (параллельного) возбуждения;
- $w_C$  - обмотка последовательного возбуждения;
- $w_D$  - обмотка добавочных полюсов;
- $w_K$  - компенсационная обмотка.

Моделирование в осях  $d, q$  обусловлено близостью процессов, происходящих в машинах постоянного тока, к процессам в синхронных машинах.

Моделирование машин постоянного тока усложняется наличием нелинейных связей, обусловленных насыщением, поперечной,

продольной и коммутационной реакцией якоря, а также влиянием вихревых токов. С целью упрощения математической модели характеристика холостого хода обычно линеаризуется, параметры считаются неизменными, а вихревые токи не учитываются.

Для моделирования с применением ЭВМ уравнения для режима двигателя можно представить в следующем виде:

$$\frac{di_{я}}{dt} = -\frac{C_e}{L_{я}} n \Phi_{рез} - \frac{R_{я}}{L_{я}} i_{я} + \frac{1}{L_{я}} u_{я};$$

$$\frac{d\Phi_{м}}{dt} = -\frac{R_B}{2p\sigma w_B} i_B + \frac{1}{2p\sigma w_B} u_B;$$

$$\Phi_{рез} = \Phi_{м} - \Phi_{р.я.};$$

$$\frac{dn}{dt} = \frac{375}{J_D},$$

- где  $i_{я}$  - ток в цепи якоря;  
 $L_{я}$  - индуктивность якорной цепи;  
 $C_e$  - постоянный коэффициент, зависящий от данных машины;  
 $n$  - частота вращения;  
 $\Phi_{рез}$  - результирующий магнитный поток, который определяется по переходной характеристике;  
 $\Phi_{м}$  - магнитный поток при холостом ходе;  
 $\Phi_{р.я.}$  - поток реакции якоря;  
 $R_{я}$  - активное сопротивление якорной обмотки;  
 $u_{я}$  - приложенное к якорной цепи напряжение;  
 $R_B$  - активное сопротивление цепи возбуждения;  
 $p$  - число пар полюсов;  
 $\sigma$  - коэффициент рассеяния главных полюсов;  
 $w_B$  - число витков обмотки возбуждения;  
 $u_B$  - напряжение, приложенное к цепи возбуждения;  
 $J_D$  - момент инерции двигателя.

Изучение переходных процессов в двигателе постоянного тока с помощью представленной математической модели производится в [5].

## Вопросы для самоконтроля

1. В каких случаях применяют модели многообмоточных электрических машин?
2. Изобразите пространственную модель асинхронного двигателя с двойной клеткой.
3. В чем особенности математической модели двигателя с двойной клеткой по сравнению с обычной асинхронной машиной?
4. Какой подход применяют при создании модели двигателя с массивным ротором?
5. Как выглядит пространственная модель машины постоянного тока?
6. Чем обусловлены дополнительные трудности при моделировании машин постоянного тока?

## 5. МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ЭЛЕКТРОМАШИН

### 5.1. Машины с электрической, магнитной и пространственной асимметрией

Симметричной считается электрическая машина, основная гармоническая индукции  $\tilde{B}$  результирующего магнитного поля которой имеет круговую форму (рис.19)

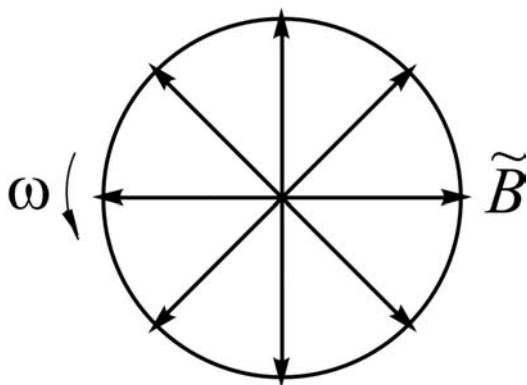


Рис.19. Круговая форма поля

В несимметричных машинах годографом вектора результирующего магнитного поля является эллипс, что может быть интерпретировано как наличие в таких машинах двух магнитных полей  $\tilde{B} = \tilde{B}_1 + \tilde{B}_2$ , вращающихся в противоположных направлениях (рис.20).

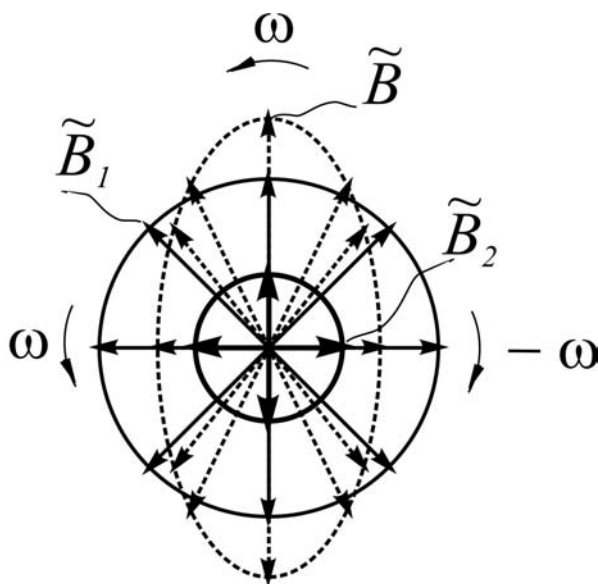


Рис.20. Эллиптическое поле



Эллиптическая форма поля в зазоре может быть обусловлена конструктивными, эксплуатационными или технологическими причинами.

Конструктивно электрическая машина может иметь несимметричные магнитопроводы статора или ротора (или статора и ротора одновременно), которые характеризуются разными магнитными проводимостями в различных радиальных направлениях (например явнополюсные машины). Под конструктивный признак подпадают однофазные машины, а также двухфазные (многофазные) с неравноценными в электромагнитном отношении фазами либо двухфазные машины, пространственный угол сдвига между фазами которых не равен  $\pi/2$  ( $\pi/m$ ).

Конструктивно симметричная машина в процессе эксплуатации может работать в несимметричных режимах, например несимметричная нагрузка многофазного синхронного генератора, однофазный режим трехфазного асинхронного двигателя и др.

Несимметричные режимы обычно моделируются с применением метода симметричных составляющих, согласно которому токи и напряжения раскладываются на прямую, обратную и нулевую последовательности.

Практически все конструктивно симметричные машины, работающие в симметричных эксплуатационных режимах, строго говоря, являются несимметричными, что обусловлено технологическими погрешностями их изготовления.

При моделировании технологические и эксплуатационные причины появления эллиптического поля могут быть сведены к конструктивным.

В зависимости от того, как произведено отступление от симметрии в машине, различают электрическую, магнитную и пространственную виды асимметрии.

Инженерный расчет несимметричных машин вызывает определенные затруднения. Особенно остро встает эта проблема при одновременном присутствии в электрической машине каких-либо двух видов несимметрии, а также при полной ее асимметрии. Рассмотрим приближенный метод расчета, позволяющий получить необходимые количественные оценки с достаточной для инженерной практики точностью [6].

Сначала получим математическую модель асинхронной машины с произвольным пространственным смещением осей обмоток.

Любое отклонение одной или нескольких осей фазных обмоток от их симметричной пространственной ориентации приводит к возникновению в воздушном зазоре машины обратно вращающегося поля. Причем расчет любой несимметричной  $m$ -фазной машины в конечном счете можно свести к расчету некоторой эквивалентной двухфазной машины с двумя

вращающимися в противоположные стороны полями. Такой подход дает возможность проанализировать физическую сторону процесса и позволяет получить интегральную информацию об электромагнитном состоянии и обобщенных выходных показателях работы машины без излишней пофазной детализации.

В соответствии с этим подходом составим математическое описание модели машины с двумя вращающимися во встречном направлении полями, амплитуды которых находятся в функциональной зависимости от угла смещения осей обмоток.

В качестве базовой модели примем асинхронный двигатель с двумя идентичными невзаимоиндуктивными фазными статорными обмотками, расположенными по осям  $\alpha, \beta$  (рис. 210).

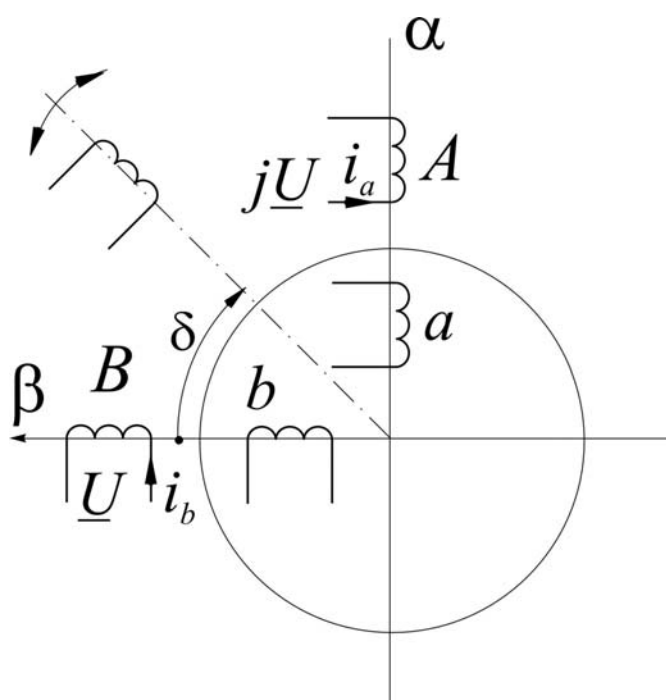


Рис. 21. Пространственная модель несимметричной машины

Моделирование пространственной асимметрии будем производить за счет изменения угла  $\delta$ , характеризующего отклонение оси обмотки В от координатной оси  $\beta$ .

Пульсирующие в направлении осей  $\alpha, \beta$  (при  $\delta=0$ ) основные гармонические магнитных потоков, сдвинутые друг относительно друга во времени на четверть периода, в соответствии с общим правилом могут быть разложены на вращающиеся в противоположных направлениях потоки половинной амплитуды. При этом прямовращающиеся потоки находятся в пространственно-временной фазе и суммируются алгебраически, а обратновращающиеся потоки – в противофазе и взаимно компенсируются.

С изменением угла  $\delta$  в интервале  $(0, \pi/2)$  изменяются амплитуды результирующих прямовращающегося  $\tilde{\Phi}_1$  и обратновращающегося  $\tilde{\Phi}_2$  потоков. В рассматриваемых условиях каждый из упомянутых потоков может быть представлен на пространственно-временной комплексной плоскости как геометрическая сумма двух составляющих потоков соответствующих последовательностей. Наглядная графическая интерпретация электромагнитного процесса, подтверждающая сказанное, представлена на рис.22. Она соответствует моменту времени, когда  $i_a = 0, i_b = I_{\max}$ .

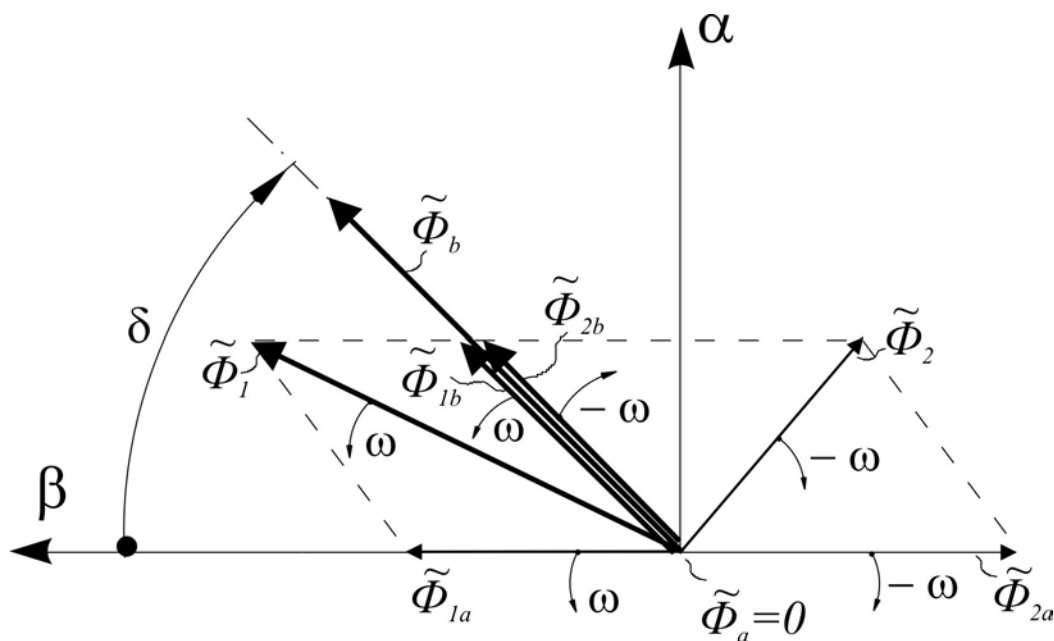


Рис.22. Пространственно-временная диаграмма

Амплитуда результирующего прямовращающегося потока

$$\Phi_1 = \sqrt{\Phi_{1a}^2 + 2\Phi_{1a}\Phi_{1b}\cos\delta + \Phi_{1b}^2},$$

где  $\Phi_1, \Phi_2$  - амплитуды прямовращающихся потоков фаз А и В.

Принимая одну из фазных обмоток, например А, за главную и учитывая, что  $\Phi_{1a} = \Phi_{1b} = \Phi_a / 2$ , преобразуем последнее выражение к виду

$$\Phi_1 = \sqrt{\frac{1 + \cos\delta}{2}} \cdot \Phi_a = k_1 \Phi_a,$$

где  $\Phi_a$  - амплитуда пульсирующего потока фазы.

Имея в виду, что обратные поля при  $\delta < \pi/2$  направлены навстречу друг другу, аналогично получаем

$$\Phi_2 = \sqrt{\frac{1 - \cos\delta}{2}} \cdot \Phi_a = k_2 \Phi_a.$$

Изменения амплитуд результирующих потоков  $\tilde{\Phi}_1$  и  $\tilde{\Phi}_2$  по представленным законам, связанные с варьированием угла  $\delta$ , физически можно интерпретировать как изменения само- и взаимоиндуктивностей, а следовательно, и соответствующих индуктивных сопротивлений. Таким образом, наличие пространственной асимметрии обмоток может быть рассмотрено как параметрический фактор и учтено в уравнениях равновесия напряжений машин за счет введения в качестве множителей соответствующих коэффициентов при индуктивных сопротивлениях контуров. При этом целесообразно использовать метод наложения и, не нарушая принципа инвариантности электромагнитной мощности, без учета начальных фаз приближенно считать, что прямо- и обратнорвращающиеся потоки создаются лишь в одной некоторой эквивалентной фазе машины.

Уравнения равновесия напряжений прямой и обратной последовательностей в эквивалентной фазе двигателя имеют вид

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{11} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + j(x_1 + k_1 x_0) & jk_1 x_0 \\ jk_1 x_0 & \frac{r_2'}{s} + j(x_2' + k_1 x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{11} \\ \underline{I}_{12} \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \underline{U}_{21} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + j(x_1 + k_2 x_0) & jk_2 x_0 \\ jk_2 x_0 & \frac{r_2'}{2-s} + j(x_2' + k_2 x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{I}_{21} \\ \underline{I}_{22} \end{bmatrix},$$

где  $\underline{U}_{11}$  и  $\underline{U}_{21}$  - напряжения прямой и обратной последовательностей;  
 $\underline{I}_{11}$ ,  $\underline{I}_{12}$  - токи прямой последовательности обмоток статора и ротора соответственно;  
 $\underline{I}_{21}$ ,  $\underline{I}_{22}$  - токи обратной последовательности обмоток статора и ротора.

В результате решения матричных уравнений и определения входных сопротивлений обеих последовательностей может быть получена Т-образная схема замещения (рис.23).

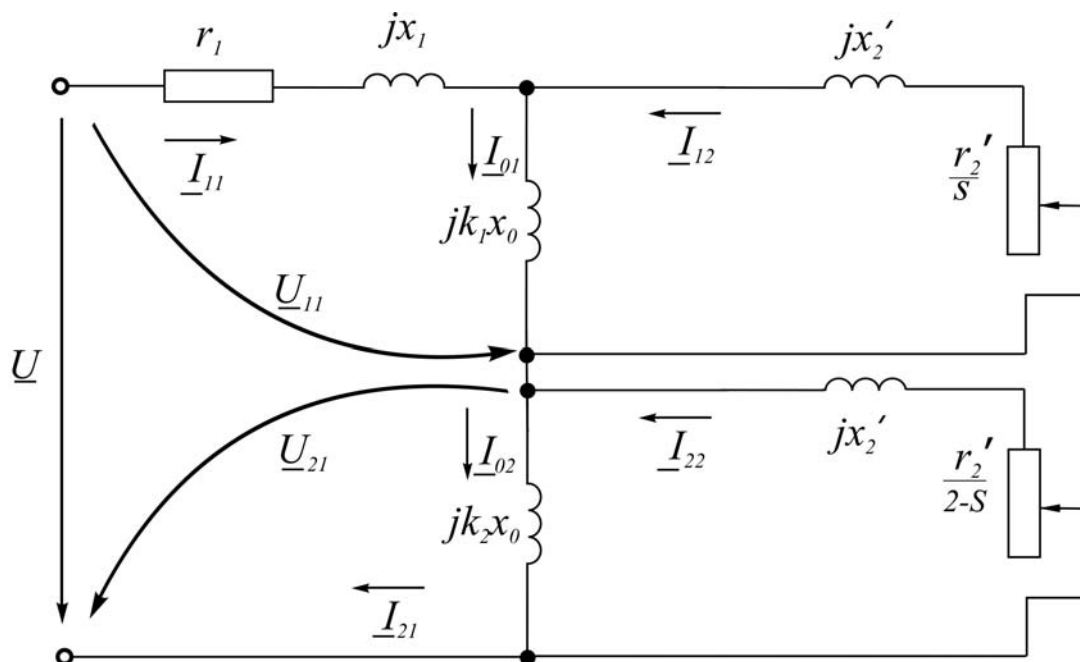


Рис.23. Схема замещения несимметричной машины

Эта схема представляет собой модифицированную схему замещения однофазной машины с двумя вращающимися полями. При  $\delta=0$  она приобретает традиционное для симметричной в пространственном отношении машины очертание. В другом частном случае при  $\delta=\pi/2$  она соответствует однофазному двигателю с пульсирующим при скольжении  $s=1$  полем.

Применение данного метода позволяет относительно просто смоделировать технологические отклонения осей фазных обмоток от заданной пространственной ориентации и оценить их последствия для тех или иных электромашин.

Распространяя указанный метод на машины с другими видами асимметрии – электрической и магнитной – получим соответствующую этим случаям схему замещения. Она будет отличаться от представленной ранее лишь значениями коэффициентов при индуктивных сопротивлениях взаимоиндукции:

$$k_1 = \frac{\sqrt{1 + k(k + 2\cos\delta_1)}}{2};$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{1 + k(k - 2\cos\delta_2)}}{2},$$

где

$$k = \frac{k_\beta F_b}{k_\alpha F_a},$$

$k_\alpha, k_\beta$  - коэффициенты формы поля по осям симметрии несимметричного (явнополюсного) статора;

$F_a, F_b$  - магнитодвижущие силы фазных обмоток А и В;

$$\delta_1 = \delta + \delta_B,$$

$$\delta_2 = \delta - \delta_B,$$

$\delta$  - пространственный угол отклонения оси фазной обмотки от симметричного расположения (положительные значения - при  $\delta > \pi/2$ );

$\delta_B$  - временной угол сдвига фаз от симметричного случая (положительные значения - при  $\delta < \pi/2$ ).

Рассмотрим некоторые частные случаи.

1. Электрическая асимметрия:  $\delta_1 = \delta_2 = \delta_B, k = \frac{F_b}{F_a},$

$$k_1 = \frac{\sqrt{1 + \frac{F_b}{F_a} \left( \frac{F_b}{F_a} + 2\cos\delta_B \right)}}{2},$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{1 + \frac{F_b}{F_a} \left( \frac{F_b}{F_a} - 2\cos\delta_B \right)}}{2}.$$

При чисто электрической асимметрии воздушный зазор в радиальном направлении равномерный, а оси фазных обмоток сдвинуты на 90 эл. градусов.

Вследствие неравноценности в электромагнитном отношении обеих фаз амплитуды МДС фазных обмоток  $F_a \neq F_b$ .

Кроме того, временной угол между МДС (токами) при симметричной системе напряжений ( $\underline{U}, j\underline{U}$ ) отличается от  $\pi/2$ .

Таким образом, основные гармонические МДС будут пульсировать в направлении осей обмоток с различной амплитудой с временным рассогласованием в  $\pi/2 + \delta_B$ .

В результате разложения МДС обеих фаз на прямо- и обратновращающиеся и раздельного геометрического сложения величин

прямой и обратной последовательностей для амплитуды результирующей прямо- и обратнорвращающейся МДС получаем

$$F_1 = \sqrt{F_{1a}^2 + 2F_{1a}F_{1b}\cos\delta_B + F_{1b}^2},$$

$$F_2 = \sqrt{F_{2a}^2 - 2F_{2a}F_{2b}\cos\delta_B + F_{2b}^2},$$

где  $F_{1a}, F_{1b}$  и  $F_{2a}, F_{2b}$  - амплитуды прямо- и обратнорвращающихся МДС фаз А и В.

Учитывая, что  $F_{1a} = F_{2a} = F_a / 2$  и  $F_{1b} = F_{2b} = F_b / 2$ , а также коэффициент приведения  $k = \frac{F_b}{F_a}$ , после преобразований записываем

$$F_1 = k_1 F_a,$$

$$F_2 = k_2 F_a.$$

Отклонение амплитуды результирующей прямо- и обратнорвращающейся МДС  $F_1$  от значения  $F_a$  и появление составляющей  $F_2$  обусловлено отклонением вращающегося поля от круговой формы. При  $F_a = F_b$  ( $k = 1$ ) и  $\delta_B = 0$  получаем схему замещения полностью симметричного двигателя. В другом частном случае при  $F_b = 0$  ( $k = 0$ ) приходим к схеме замещения однофазной машины с одной обмоткой на статоре.

2. Магнитная асимметрия:  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ ,  $k = \frac{k_\beta}{k_\alpha}$ ,

$$k_1 = \frac{1 + \frac{k_\beta}{k_\alpha}}{2},$$

$$k_2 = \frac{1 - \frac{k_\beta}{k_\alpha}}{2}.$$

Магнитная асимметрия в чистом виде предполагает наличие неравномерного воздушного зазора (явнополюсность статора) при полной идентичности фазных обмоток, сдвинутых в пространстве на 90 эл. градусов.

Пульсирующие в направлении осей  $\alpha, \beta$  МДС фаз вследствие различной магнитной проводимости зазора будут создавать разные индукции  $B_a \neq B_b$ .

В случае равномерного зазора  $k_\alpha = k_\beta$  имеем  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 0$  и схема замещения отвечает симметричной машине.

3. Пространственная асимметрия:  $\delta_1 = \delta_2 = \delta$ ,  $k = 1$ .

$$k_1 = \frac{\sqrt{1 + \cos\delta}}{2},$$

$$k_2 = \frac{\sqrt{1 - \cos\delta}}{2}.$$

Таким образом, приходим к схеме замещения двигателя с чисто пространственной асимметрией.

Рассмотренный метод позволяет моделировать электрические машины с электрической, магнитной и пространственной видами асимметрии, а также их комбинацией.

## 5.2. Учет технологических факторов в математических моделях электрических машин

Несимметричными можно считать и электрические машины, имеющие технологические отклонения от своей конструкции.

На разброс характеристик серийно выпускаемых электрических машин влияют в первую очередь такие технологические отклонения, как:

- разброс параметров зазора  $\delta$ ;
- наличие технологических короткозамкнутых контуров.

Последние образуются после механической обработки, сварки и прессовки магнитопроводов машин. Их можно учесть в модели многообмоточной машины за счет введения в модель дополнительных обмоток.

Отклонение зазора в реальной машине от  $\delta = \text{const}$  может быть связано со следующими основными причинами:

- а) эллипсностью ротора (рис.24);



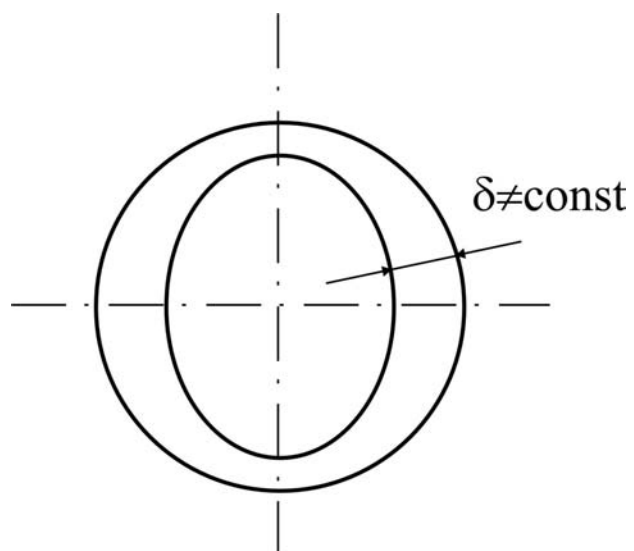


Рис.24. Эллипсность

б) эксцентриситетом ротора относительно статора (рис.25);

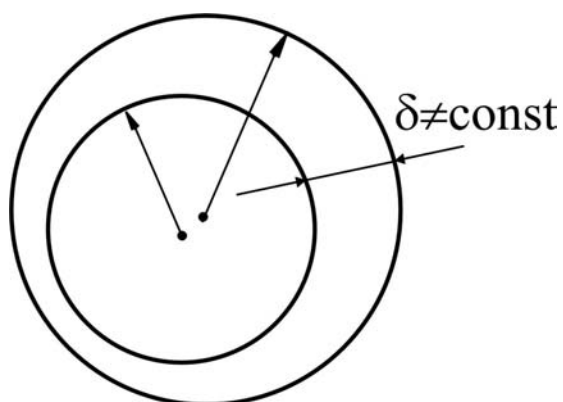


Рис.25. Эксцентриситет

в) конусностью статора либо ротора (рис.26).

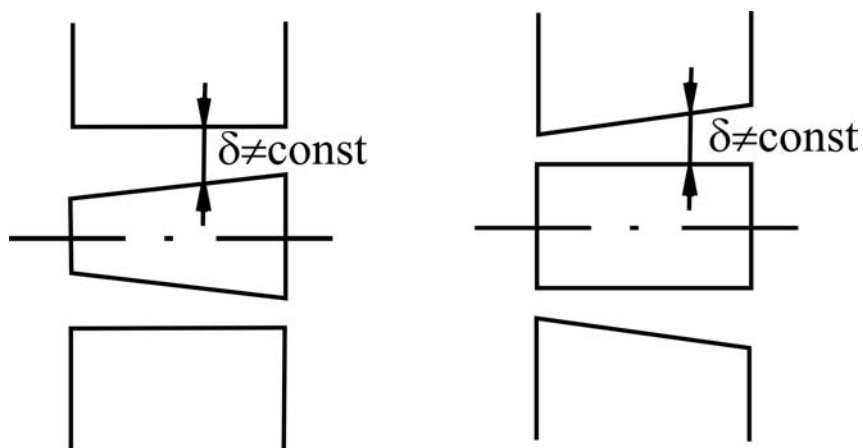


Рис.26. Конусность

Неравномерность зазора также может быть учтена в математической модели многообмоточной машины. Так, для случая конусности магнитопровода модель будет состоять из нескольких машин, смещенных в аксиальном направлении. В пределах длины каждой элементарной машины может быть принято  $\delta = \text{const}$ . Параметры каждой из таких машин будут иметь разные значения, зависящие от длины своего зазора.

Ввиду сложности изучения подобных моделей, их целесообразно реализовывать на ЭВМ.

Полученные данные о влиянии технологических факторов на характеристики машин статистически обрабатываются. На этой основе выдвигаются требования по предельно допустимым отклонениям от задаваемых значений тех или иных линейных размеров в процессе изготовления конкретных типов электрических машин.

#### Вопросы для самоконтроля

1. Какая машина создает круговую форму поля в воздушном зазоре?
2. Чем обусловлена эллиптичность поля в зазоре реальной электрической машины?
3. Какими причинами может быть вызвана электрическая несимметрия в машине?
4. В каких случаях возникает пространственная асимметрия электрической машины?
5. Приведите примеры электромеханического преобразования с магнитной несимметрией.
6. Какой подход может быть применен при создании математической модели несимметричной машины?
7. Изобразите схему замещения несимметричной электрической машины.
8. С чем связана неравномерность воздушного зазора в электрической машине?
9. Какой подход применяется при моделировании машин с неравномерным зазором?

## 6. ОСНОВЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ АППАРАТОВ

### 6.1. Основные принципы моделирования электромагнитов

Большинство электрических аппаратов общепромышленного применения имеет электромагнитную систему, содержащую электромагнит постоянного или переменного тока. Электромагниты, наряду с электрическими машинами, являются также электромеханическими преобразователями, так как преобразуют электрическую энергию протекающего по их обмотке тока в механическую энергию. Последняя вызывает появление электромагнитной тяговой силы  $F_{эм}$  (рис.27) или вращающего момента  $M_{вр}$  на их подвижной системе (якоре).

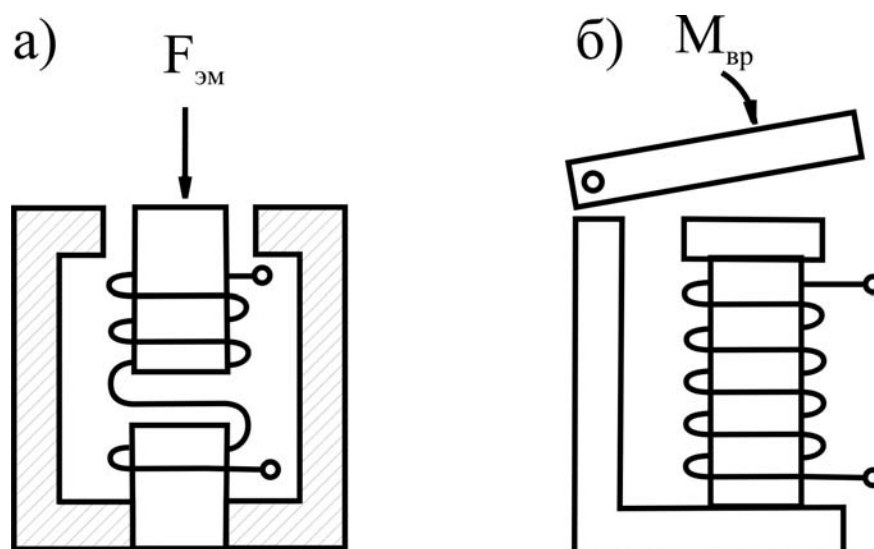


Рис.27. Броневая (а) и клапанная (б) системы

В отличие от электрических машин линейные перемещения или углы поворота этих электромеханических преобразователей небольшие (обычно до нескольких сантиметров или нескольких десятков градусов).

Модель любой сложной электромагнитной цепи строится по следующим правилам [7]:

- схема модели должна быть такой же, как и схема оригинала;
- в сходственных ветвях должны быть одинаковые относительные действующие значения напряжения с равными относительными угловыми скоростями и фазовыми углами;
- размеры магнитопровода должны быть такими, чтобы отношения их поперечных сечений и средних длин к сечению и средней длине

основного магнитопровода были одинаковыми со сходственными отношениями в оригинале;

- обмотки магнитных элементов должны иметь равные отношения сходственных витков отдельных элементов к числу витков главной обмотки основного магнитного элемента;

- конструктивное исполнение основного магнитопровода должно обеспечивать необходимые пределы изменения величин  $x_*$  и  $H_*$ , где относительное значение индуктивного сопротивления

$$x_* = \frac{\omega w_{pm}^2 S_m \mu_{\delta}}{l_m R_p};$$

относительное значение напряженности магнитного поля

$$H_* = \frac{u_a w_{pm}}{l_m R_p H_{\delta}};$$

$\omega$  - угловая частота источника;

$w_{pm}$  - число витков главной обмотки  $p$ -й ветви  $m$ -го магнитного элемента, принимаемого в качестве основного;

$S_m$  - поперечное сечение  $m$ -го магнитного элемента;

$\mu_{\delta}$  - базисное значение магнитной проницаемости;

$l_m$  - длина средней магнитной силовой линии  $m$ -го элемента;

$R_p$  - магнитное сопротивление  $p$ -й ветви;

$u_a$  - действующее значение напряжения;

$H_{\delta}$  - базисное значение напряженности магнитного поля.

Выполняя модель согласно изложенным рекомендациям, устанавливают сложные функциональные зависимости, связывающие токи со многими факторами. Получающиеся при этом уравнения (математические модели) обычно решают с помощью ЭВМ.

При физическом моделировании электромагнитных цепей электрических аппаратов форму записи уравнений, как правило, упрощают. Так, при создании модели для изучения статических режимов работы электромагнитов переменного тока производят замену реального (не поддающегося исследованию) электромагнита эквивалентным.

Это достигается за счет принятия следующих допущений:

- рассеяние и потери в стали отсутствуют;
- поперечное сечение сердечника неизменно по средней длине силовых линий;
- индукция постоянна во всех точках;

- подобие нелинейности кривой намагничивания учитывается относительной характеристикой  $\mu_*(H_*) = \text{idem}$ .

Для создания такой модели необходимо выполнить критерии подобия:

а) индуктивное сопротивление катушки

$$\pi_1 = x_* = \text{idem};$$

б) напряженность магнитного поля

$$\pi_2 = H_* = \text{idem};$$

в) относительная длина немагнитного (воздушного) зазора

$$\pi_3 = \delta / l = \text{idem};$$

г) критерий гомохронности

$$\pi_4 = \omega t = \text{idem};$$

д) магнитная характеристика

$$\pi_5 = \mu_* = f(H_*) = \text{idem};$$

е) активное сопротивление  $R_{\text{эк}}$  экранирующих короткозамкнутых витков  $w_{\text{эк}}$

$$\pi_6 = \frac{R_{\text{эк}} w_{\text{эк}}^2}{R w_{\text{эк}}^2} = \text{idem};$$

отношение неэкранированной и экранированной (рис.28) частей полюса

$$\pi_7 = \frac{S_{\text{нэ}}}{S_{\text{эк}}} = \text{idem}.$$

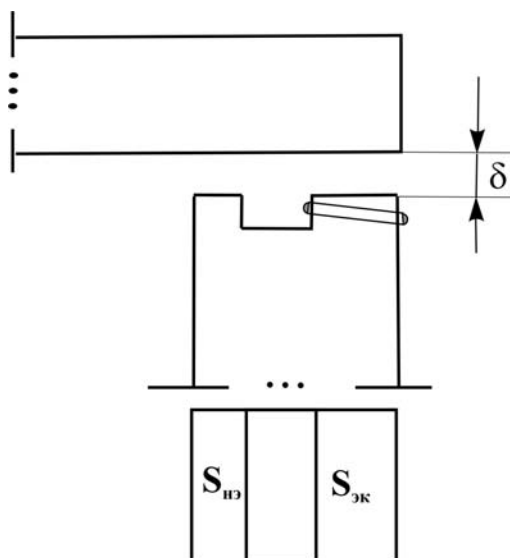


Рис.28. Полюс с короткозамкнутым витком

Короткозамкнутый виток (обмотка) на полюсе (якоря) применяют в электромагнитах переменного тока для устранения вибраций.

Для изучения динамических режимов работы электромагнитов создают модели, в которых принимают, что

- активное сопротивление  $R$  включает как сопротивление постоянному току катушки, так и эквивалентное сопротивление, отвечающее потерям в магнитопроводе;

- параметр  $L$  полностью характеризует индуктивность катушки с учетом потоков рассеяния;

- нелинейность параметров  $R$  и  $L$  учитывается зависимостью от тока  $i$  и размеров  $x, y, z$ , т.е.

$$L = \varphi(i, x, y, z) \text{ и } R = \varphi(i, x, y, z),$$

относительные характеристики которых должны быть соответственно одинаковы в модели и оригинале;

- экранирующие короткозамкнутые витки не влияют на тяговую силу, развиваемую электромагнитом.

При создании таких моделей должны быть соблюдены следующие критерии подобия:

а) относительная постоянная времени цепи катушки

$$\pi_1 = T_* = \frac{\omega L}{R} = \text{idem},$$

где  $\omega$  - угловая частота напряжения, подводимого к цепи катушки;

б) коэффициент использования затраченной при включении электромагнитной энергии

$$\pi_2 = \eta_* = \frac{\omega F_{кр} l_{\sigma} R}{u^2} = \text{idem},$$

где  $F_{кр}$  - противодействующая сила в критической точке;

$l_{\sigma}$  - базисный размер;

в) относительная сила инерции подвижных частей электромагнита

$$\pi_3 = M_* = \frac{\omega^2 m l_{\sigma}^2}{F_{кр}} = \text{idem},$$

где  $m$  - масса подвижных элементов электромагнита;

г) относительная сила трения

$$\pi_4 = Q_* = \frac{\omega g l_{\delta}^2}{F_{кр}} = \text{idem},$$

где  $g$  - коэффициент трения;

д) относительные геометрические размеры

$$\pi_5 = y_* = \frac{y}{l_{\delta}} = \text{idem}, \quad \pi_5 = z_* = \frac{z}{l_{\delta}} = \text{idem},$$

где  $y, z$  - некоторые характерные размеры магнитной системы в направлении осей  $y$  и  $z$ ;

е) критерий гомохронностей

$$\pi_6 = \omega t = \text{idem}$$

и начальный фазовый угол напряжения  $\alpha = \text{idem}$ .

Кроме выполнения приведенных критериев для подобию электромагнитов в динамическом режиме, требуется совпадение относительных характеристик противодействующих сил:

$$F_* = \frac{F_{np}}{F_{кр}} = \varphi(l_{*n}) = \text{idem},$$

где  $F_{np}$  - текущее значение противодействующей силы;

$l_{*n}$  - относительное значение перемещения.

Электромагнитные аппараты, контакторы, реле и другие аналогичные устройства могут рассматриваться на основе частной математической модели в виде упрощенной механической характеристики противодействующих сил  $F_* = \varphi(l_{*n})$  (рис.29).

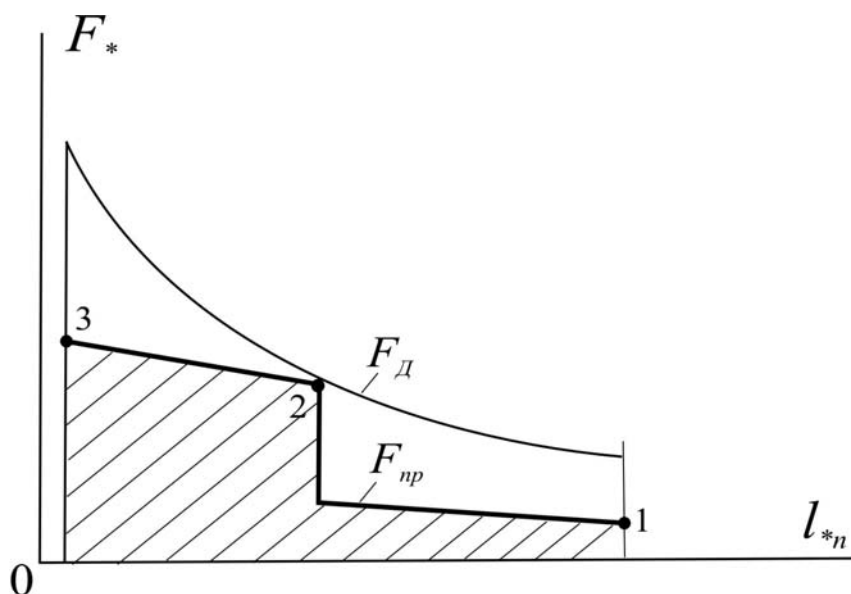


Рис.29. Механическая характеристика противодействующих сил  
 $F_{д}$  - динамическая тяговая характеристика электромагнита;  
 $F_{пр}$  - характеристика противодействующих сил.  
 (1 – срабатывание; 2 – замыкание главных контактов; 3 - отпущание)

Характеристика противодействующих сил имеет два практически прямоугольных участка: до и после замыкания контактов.

Выражения критериев подобия должны быть уточнены введением следующих величин:

$l_{*П0}$  и  $l_{*П1}$  - относительное значение хода якоря контактов до и после замыкания;

$k_{*0}$  и  $k_{*1}$  - относительные коэффициенты крутизны участков механической характеристики;

$y_*$ ,  $z_*$ ,  $\Delta_*$  - относительные размеры магнитопровода

$$y_* = \frac{c}{a}; z_* = \frac{b}{a}; \Delta_* = \frac{\Delta}{h_k},$$

где  $b$  – ширина окна, занятого катушкой;

$c$  – толщина пакета;

$\Delta$  – высота внедрения сердечника в катушку;

$h_k$  – высота намотки катушки.

Выбирая базисные значения нелинейных параметров, всегда можно добиться тождественности их относительных характеристик.

Обычно за базисное сопротивление принимают активное сопротивление цепи катушки, за базисный размер – ширину основного полюса.

Базисную индуктивность для Ш-образных магнитных систем можно рассчитать по формуле



$$L_{\delta} = k_L \mu_0 w^2 S / a,$$

где  $k_L - 1,1 \dots 1,5$ .

При выборе величины  $\mu_{\delta}$  и  $n_{\delta}$  необходимо иметь в виду, что значения этих параметров зависят от материала магнитопровода, значения зазора  $\delta$ , а также от качества шлифовки рабочей поверхности и изменения магнитных свойств материала сердечника в результате технологической обработки.

При исследовании статических и динамических характеристик электромагнитов, в частности контакторов переменного тока, на физической модели, в зависимости от конкретных условий, могут быть приняты те или иные упрощения. Так, при моделировании динамических режимов прямоходных контакторов за неизменные можно принять параметры  $L_{\delta}$ ,  $a$ ,  $F_{кр}$ . Тогда остальные параметры модели следует регулировать, с тем чтобы менять соответствующие критериальные величины.

В современных электромагнитных устройствах влияние трения практически незначительно, в связи с чем можно пренебречь  $Q=0$ . На практике наиболее распространено приближенное моделирование, при котором устанавливают следующие критериальные величины:

$$T_*, \eta_*, M_*, F_{*np}, \delta_{*0}, \delta_{*1}, \Delta_*, \alpha.$$

## 6.2. Моделирование аппаратов с постоянными магнитами

При моделировании систем с постоянными магнитами приходится решать относительно сложные задачи по расчету магнитных полей. При этом обычно магнит рассматривают как область пространства, заполненную активной нелинейной средой (поляризованным ферродиеlectricом), являющейся источником магнитного напряжения.

Эта активная среда окружена пространством с пассивной линейной (воздух) или нелинейной (арматура магнита) средой.

При моделировании постоянного магнита магнитостатическое поле заменяют рассмотрением электрического поля в проводящей среде. Реализация такой аналогии требует создания проводящей нелинейной среды, свойства которой в сходственных точках были бы подобны свойствам нелинейной магнитной среды (магнита). Необходимо также создать проводящую линейную электрическую среду, моделирующую

окружающее магнит линейное воздушное пространство. Поля этих двух систем будут подобны.

Однако реализация сплошной электрической среды с изменяющимися в широких пределах нелинейными свойствами, отражающими многообразие магнитных материалов, встречает серьезные технические трудности. Поэтому при таком моделировании заменяют сплошную среду сеткой нелинейных активных двухполюсников, внешние характеристики которых можно изменять в широких пределах. При этом магнит как бы разбивается на ряд последовательно включенных объемов, магнитное состояние которых моделируется соответствующим нелинейным элементом в модели. Магнитное состояние каждого объема определяется рабочей точкой на спинке петли гистерезиса. Рабочие точки электрических нелинейных элементов устанавливаются в модели автоматически, при этом распределение электрических потенциалов и токов в модели сразу дает решение задачи.

Рабочее поле электроинтегратора, отвечающее окружающему магнит пространству, может быть либо сплошной средой (электролитическая ванна, полупроводящая бумага), либо сеткой пассивных сопротивлений.

Достоинством моделей – сплошных сред является возможность получения трехмерного геометрического подобия модели и оригинала. Недостатками их являются громоздкость оборудования, относительно невысокая точность, необходимость применения только переменных токов для исключения погрешностей от поляризации.

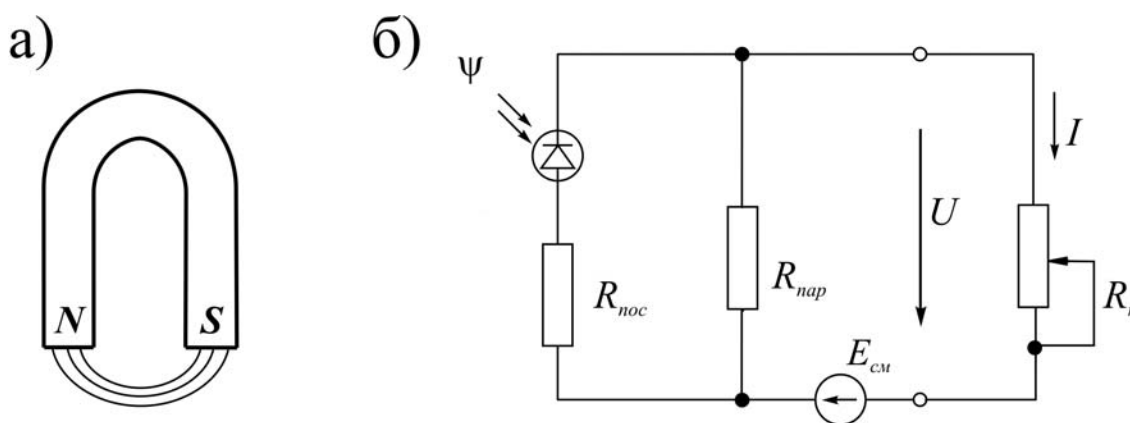


Рис.30. Постоянный магнит (а) и его модель в виде нелинейного активного двухполюсника (б)

Внешняя характеристика такой модели  $I(U)$  по конфигурации подобна кривой размагничивания  $\Phi(U_m)$  магнитной цепи. Аналогом постоянного магнита (рис.30) является кремниевый фотодиод, работающий в вентильном режиме: при освещении он становится источником ЭДС с

нелинейным внутренним сопротивлением. Изменениями светового потока  $\Psi$ , последовательного  $R_{\text{пос}}$  и параллельного  $R_{\text{пар}}$  сопротивлений, включенных на выходе фотодиода, а также введением источника ЭДС  $E_{\text{сн}}$  можно в широких пределах изменять масштаб и форму выходной характеристики. Магнитная система при этом может быть разбита на участки, которым в модели должны соответствовать нелинейные элементы.

Зная длину  $l_i$  и сечение  $S_i$  элементарных объемов, по известной кривой  $B(H)$  размагничивания материала магнита можно построить зависимость магнитного состояния  $\Phi_i(U_{mi})$  этих объемов. Затем следует ввести масштабы подобия

$$m_U = \frac{U_M}{U}; m_\mu = \frac{\mu_0}{\sigma}; m_l = \frac{l_M}{l_\Omega}.$$

Масштаб подобия

$$m_I = \frac{\Phi}{I}$$

находится из равенства

$$m_I = m_U m_\mu m_l,$$

которое следует из подобия уравнений модели и оригинала.

Определив масштабы подобия, можно перейти от зависимостей  $\Phi_i(U_{mi})$  к зависимостям  $I(U)$ , по которым настраивают нелинейные элементы. Настроенные нелинейные элементы подключаются к рабочему полю электроинтегратора, моделирующего окружающее магнит пространство.

### 6.3. Моделирование вытеснения тока в проводах

В электрических аппаратах, как и в других электромагнитных устройствах, происходит явление вытеснения тока, характеризующееся возрастанием сопротивления с ростом частоты  $f$  и сечения проводника  $S$ .

Если частота тока, проходящего по проводу из немагнитного материала, не слишком велика, то при моделировании эффекта вытеснения в проводниках подобной формы, но разных размеров должно быть соблюдено одно условие подобия

$$\omega \mu r s = \text{idem}.$$

Отсюда следует, что каждый из факторов одинаково влияет на эффект вытеснения тока.

Полученные результаты могут быть распространены и на системы проводников, в том числе на катушки индуктивности. В последнем

случае в условия геометрического подобия должны входить диаметр провода, шаг намотки, диаметр катушки и расстояние между слоями намотки.

При повышении частоты межвитковая емкость катушек оказывается уже весьма заметной. Однако, несмотря на значительную разницу в величине емкости, катушки модели и оригинала при разных своих размерах и разных частотах тока имеют одинаковое отношение сопротивлений  $R_{\sim} / R_{-}$ .

При учете зависимости  $\mu = f(H)$  дополнительным условием будет соблюдение у модели и оригинала одинаковости относительных характеристик

$$\mu_* = f(H_*) = \text{idem.}$$

Для тех случаев, когда необходимо учитывать стальные конструкции вблизи токопровода, требование одинаковых относительных характеристик модели и оригинала запишется в виде

$$\mu_* = \mu_k / \mu_{k+1} = \varphi(H_k / H_{k+1}) = \text{idem,}$$

где  $k$  и  $k+1$  – пара точек пространства модели и оригинала.

Это требование легко выполняется при пренебрежении изменением магнитной проницаемости в зависимости от частоты. Однако для его выполнения необходимо соблюдение масштабов токов

$$i_m = i_0 \frac{l_m}{l_0}.$$

Масштаб сопротивлений модели и оригинала обратно пропорционален линейному масштабу:

$$\frac{R_m}{R_0} = \frac{x_m}{x_0} = \frac{l_0}{l_m}.$$

#### 6.4. Моделирование аппаратов с экранирующими элементами

Для моделирования явлений, происходящих в различного рода экранирующих конструкциях, в модели устанавливаются расположенные параллельно проводнику с током стальные пластины, подобранные так, чтобы их параметры отвечали критериям подобия.

По результатам измерения в модели строится зависимость, пользуясь которой можно определить вносимое сталью сопротивление  $R$ :

$$\frac{R}{l \frac{h}{2d} f} = \varphi\left(\frac{h}{2d}\right),$$

где  $l$  - длина;  
 $h$  - расстояние от пластины до проводника;  
 $2d$  - ширина стальной пластины;  
 $f$  - частота тока в проводнике.

Полученная зависимость позволяет определить потери в стальном листе, над которым проходит одиночный проводник с током.

При двух проводниках с токами  $i_1$  и  $i_2$ , расположенные один над другим, магнитные потери

$$P_m = P_1 + P_2 \pm 2P_x,$$

где  $P_1$  и  $P_2$  - мощности потерь от проводников с токами  $i_1$  и  $i_2$ ;  
 $P_x$  - мощность потерь от фиктивного проводника с током  $i_x = \sqrt{i_1 i_2}$ , расположенного на расстоянии  $x$  от поверхности проводника. Знак «+» берется при одинаковом направлении токов в проводниках, «-» - при противоположных направлениях токов.

Аналогично определяются потери и при большем числе проводников.

### Вопросы для самоконтроля

1. Перечислите основные правила создания модели электромагнита.
2. Какие критерии подобия необходимо выполнить при создании физической модели электромагнитного аппарата?
3. Изобразите модель в виде упрощенной механической характеристики противодействующих сил.
4. Какой подход применяют при создании модели электрического аппарата с постоянными магнитами?
5. Дайте описание модели постоянного магнита.
6. Как моделируется вытеснение тока в проводах электрических аппаратов?
7. Приведите математическую модель для учета влияния экранирующих элементов в аппарате.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Каган А.В. Основы моделирования в электромеханике. – СПб.: СЗПИ, 1995. – 58 с.
2. Копылов И.П. Математическое моделирование электрических машин. – М.: Высшая школа, 2001. – 327 с.
3. Батоврин А.А. Электрические машины (спецкурс). – Л.: СЗПИ, 1984. – 80 с.
4. Сипайлов Г.Л., Кононенко Е.В., Хорьков Г.А. Электрические машины (специальный курс). – М.: Высшая школа, 1987. – 279 с.
5. Рябуха В.И. Переходные процессы в трансформаторах и машинах постоянного тока. – Л.: СЗПИ, 1989. – 53 с.
6. Каган А.В. Параметрический метод учета несимметрии статоров асинхронных электродвигателей. – Известия ВУЗов. Электромеханика, 1989, № 3, С.53-55.
7. Веников В.А., Веников Г.В. Теория подобия и моделирования. – М.: Высшая школа, 1984. – 439 с.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Амплитуда гармонической МДС 17  
Аналитические методы решения уравнений 20  
Вытеснение тока 42, 67  
Гармонические составляющие магнитного поля  
— временные 12  
— пространственные 13  
— — высшие 15  
— — низшие 16  
Гармонический анализ кривой МДС 17  
Гомохронности критерий 61  
Двигатель асинхронный 8, 30, 41, 53  
Идеализированная электрическая машина 4  
Инвариантность мощности 4  
Индуктивность  
— взаимная 7  
— полная 7, 62  
— рассеяния 7  
Классический метод решения уравнений 20  
Конусность статора (ротора) 57  
Короткозамкнутый виток 61  
Критерии подобия 61  
Круговое поле 4, 48  
    Математическая модель в установившемся режиме работы  
— асинхронной машины 32  
— машины постоянного тока 45  
— синхронной машины 37  
— трансформатора 7, 29  
Механическая характеристика  
— асинхронного двигателя 35  
— противодействующих сил электромагнитного аппарата 64  
  
МДС  
— распределенной обмотки 16  
— сосредоточенной обмотки 15  
Модель двигателя  
— с двойной клеткой 43  
— с массивным ротором 44

Момент	7, 34, 59	
Несимметрия электрической машины		
— магнитная	48, 55	
— пространственная	48, 56	
— электрическая	49, 54	
Операторный метод решения уравнений		22
Параметры машины	7	
Периодические коэффициенты		5
Постоянные магниты	65	
Принужденная составляющая тока		21
Преобразование		
— Карсона – Хевисайда	22, 25	
— Лапласа	22	
Пространственная модель		5
Режим		
— динамический	61	
— статический	60	
Свободная составляющая тока		21
Система координат	6	
Субматрица	18	
Ток короткого замыкания	28	
Удельная магнитная проводимость		14
Уравнения		
— Парка – Горева	9	
— электромеханического преобразования		6, 9
Фаза гармонической МДС	17	
Экранизирующие элементы	68	
Эксцентриситет ротора	57	
Эллипсность	56	
Эллиптическое поле	48	



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
1. Модель идеализированного электромеханического преобразователя энергии.....	4
2. Математическая модель машины с учетом гармонических составляющих поля.....	12
3. Аналитические методы решения уравнений электромеханического преобразования .....	20
3.1. Границы применимости основных методов решения уравнений электрических машин .....	20
3.2. Особенности классического метода .....	20
3.3. Решение уравнений операторным методом .....	22
3.4. Методы моделирования установившихся электромагнитных процессов .....	28
4. Математические модели многообмоточных электромеханических преобразователей .....	41
5. Моделирование несимметричных электромашин .....	48
5.1. Машины с электрической, магнитной и пространственной асимметрией .....	48
5.2. Учет технологических факторов в математических моделях электрических машин .....	56
6. Основы моделирования электрических аппаратов .....	59
6.1. Основные принципы моделирования электромагнитов .....	59
6.2. Моделирование аппаратов с постоянными магнитами .....	65
6.3. Моделирование вытеснения тока в проводах .....	67
6.4. Моделирование аппаратов с экранирующими элементами ....	68
Литература .....	70
Предметный указатель .....	71